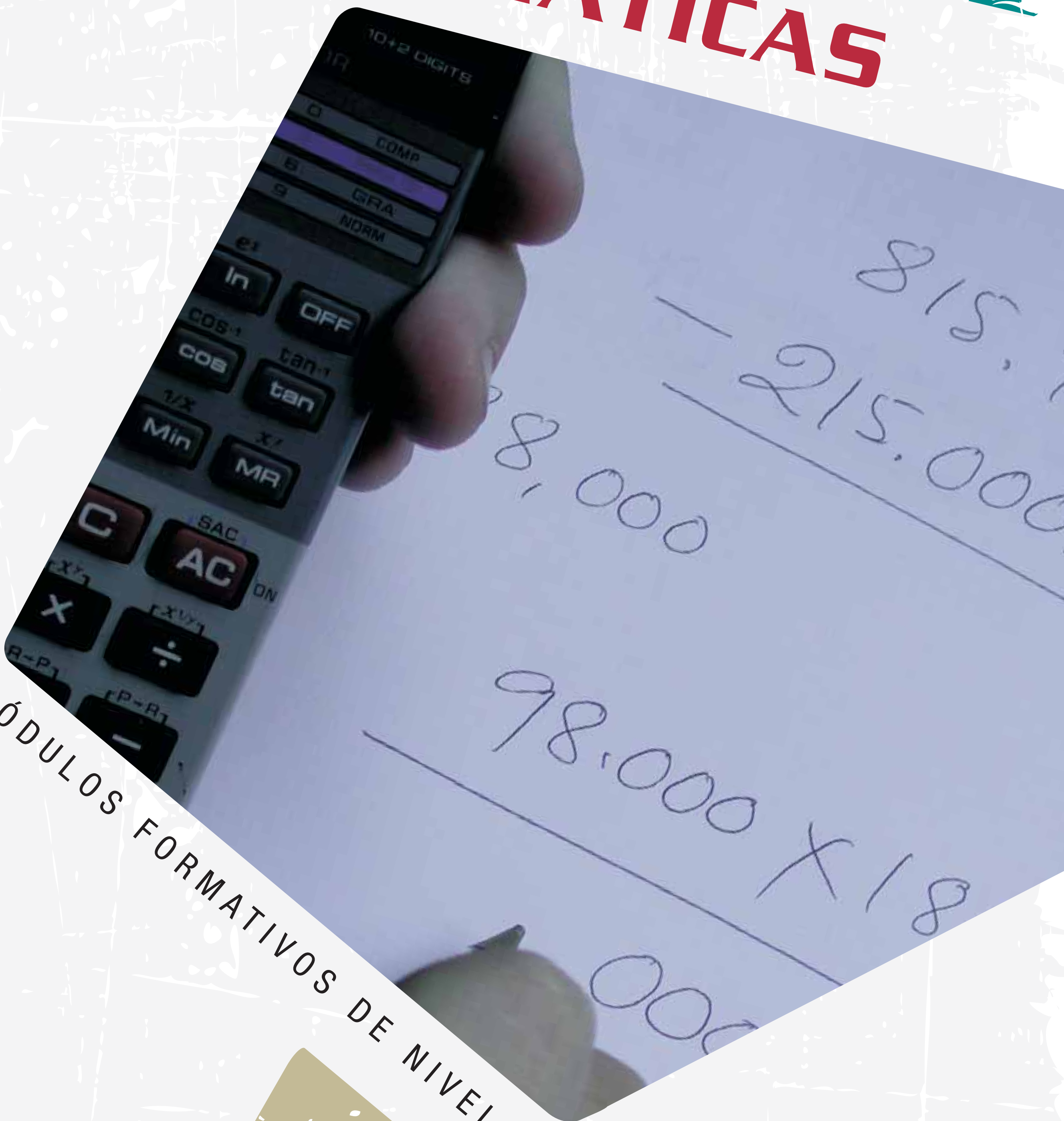
INSTITUTO ARAGONÉS DE EMPLEO

MATEMÁTICAS



MÓDULOS FORMATIVOS DE NIVEL 2

GOBIERNO DE ARAGON

MATEMÁTICAS

MÓDULOS FORMATIVOS DE NIVEL 2

Primera edición septiembre 2011

Autores:
– Mª Pilar González Mateo
– José Luis Gracia Amigot
– Mª Virtudes Guillén Lorén
– Raquel Perdiguero López
– Javier Velilla Gil

Diseño de maquetación y de cubierta: INO reproducciones

Edita: Gobierno de Aragón

Impreso en España.
Por: INO reproducciones

Esta publicación electrónica, corresponde a los módulos formativos de los certificados de profesionalidad de nivel 2.

INDICE

INTRODUCCIÓN

Probablemente los seres humanos empezamos a contar con los dedos y por esa misma razón razón ideamos un sistema numérico decimal basado en 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0), el número de dedos de nuestras manos.

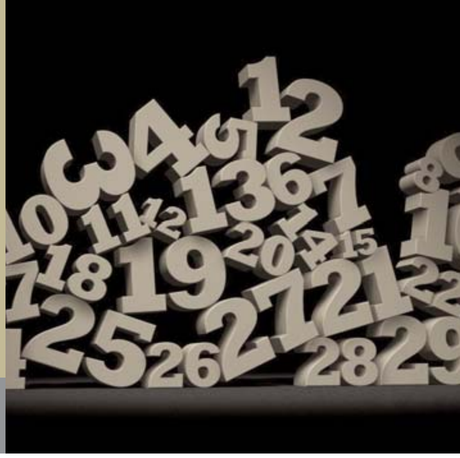
Al principio, con los números enteros y positivos (números Naturales) era suficiente para resolver la operación de la suma, pero la invención de la resta, al no poder resolver algunas operaciones como 5 – 10, nos obligó a ampliar los números (necesitábamos los números negativos).

Asimismo, la operación de la división –repartir entre varias personas, por ejemplo– nos obligó a otra ampliación numérica: los números fraccionarios.

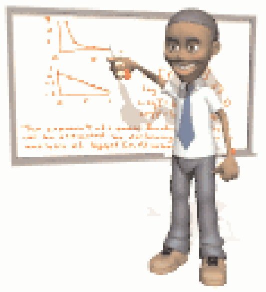
Ya ves, cuando un problema no tiene solución, debemos poner en funcionamiento nuestra capacidad de razonar y buscar soluciones.

TIPOS DE NÚMEROS. NÚMEROS NATURALES

1



INTRODUCCIÓN



En esta unidad vamos a trabajar los **tipos de números** y los **números naturales.**

Los **tipos de números** es un tema de introducción a los números que iremos desarrollando a los largo del curso.

Con los **números naturales** empezamos el estudio de los campos numérico. En la historia los seres humanos hemos ido ampliando el campo de los números según se hacía necesario para encontrar solución a distintos problemas.

Los números naturales son números enteros y positivos (0, 1, 2, 3, 4...) y se empezaron a utilizar para contar cosas del medio natural indivisible, como ovejas, personas, dedos... La operación de la resta, como veremos, no obligó a ampliar el campo de los números, puesto que con los números naturales no podíamos resolver operaciones como 4 – 10.

TIPOS DE NÚMEROS

En esta sección vamos a conocer o a recordar los distintos tipos de números que aparecen tanto en matemáticas, como en otras ciencias y en la vida diaria.

Es sólo una introducción, ampliada en los temas posteriores, que nos dará una visión general del porqué de los números.

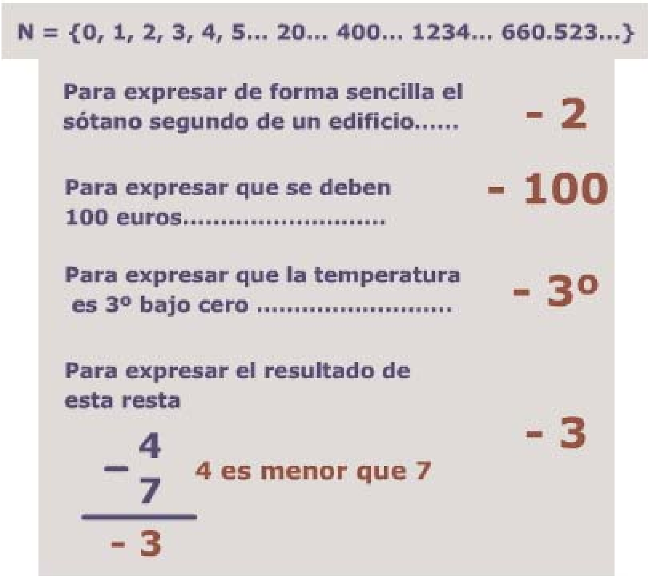
Números naturales y números enteros

Números naturales

Los utilizamos para contar, ordenar, expresar códigos,...

Son los primeros que el hombre necesitó utilizar *de forma natural,* para indicar la cantidad de animales que veía, para intercambiar posesiones sin ganar ni perder con el cambio, etc.

Al conjunto de los números naturales se le designa con la letra N



Números enteros

Hay situaciones en las que los números naturales no son suficientes, por lo que necesitamos crear otros nuevos, que llamaremos números enteros.

El conjunto de los números enteros se designa con la letra Z

Z = {0, 1, 2, 3, 4, 5... 200... 400... 1234... 660.523...}

Observaciones:

- Los números enteros positivos son los números naturales.
- Cualquier número natural se puede considerar entero, pero al revés no.

Por ejemplo:

7 es un número natural y entero
-9 es un número entero, pero no es natural

Actividades

Complete la siguiente tabla:

	Natural	Entero	Anterior	Posterior
-1				
125				
-653				
+ 42				
0				
3.011.111				
-444444				

Números decimales

Los números decimales sirven para expresar medidas, pues pueden designar valores intermedios entre los números enteros.

Por ejemplo:

- Para expresar la altura en metros de una persona (1,68m)
- Para expresar el precio del kilo de naranjas (1,83 euros/kg)

Actividades

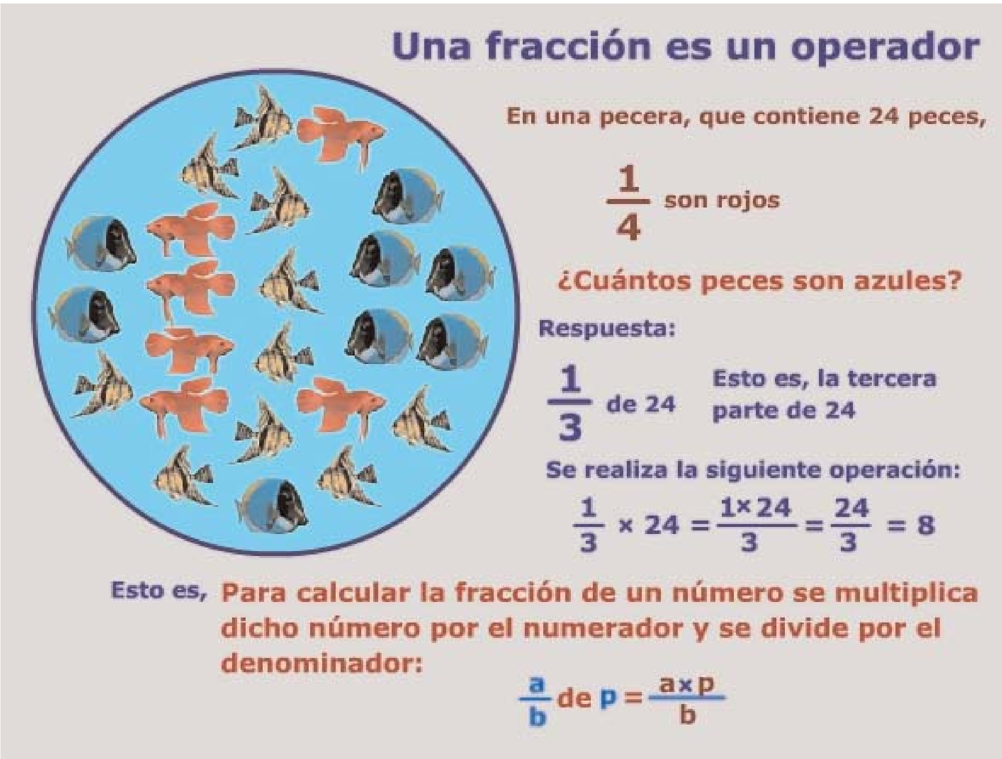
Escribe con cifras:	
a) Veinticinco milésimas	
b) 37 centésimas	
c) Dos unidades y siete diezmilésimas	
d) Doscientos sesenta millonésimas	

Fracciones

Para medir suele ser necesario *fraccionar la unidad.* De aquí surge la idea de número fraccionario: mitad, quinta parte, milésima parte...

Una fracción se puede interpretar de diferentes maneras:

A) Una fracción es una parte de la unidad.



B) Una fracción es un operador.

Para calcular la fracción de un número se multiplica dicho número por el numerador y se divide por el denominador

$$\frac{a}{b} \text{ de } p = \frac{a * p}{b}$$

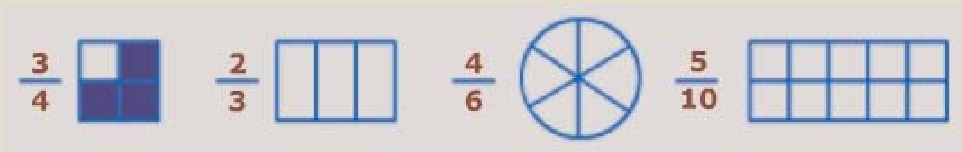
C) Una fracción es un cociente de dos números.

$$\frac{4}{5} = 4 \text{ dividido para } 5 = 0{,}8$$

$$\frac{12}{3} = 12 \text{ dividido para } 3 = 4$$

Actividades

Coloree, como en el ejemplo, la fracción indicada



Calcule

a) $\frac{1}{4}$ de 24

b) $\frac{3}{5}$ de 75

c) $\frac{7}{3}$ de 270

Relación entre fracciones y números decimales

Cualquier número entero se puede expresar como una fracción.

$$48 = \frac{48}{1}$$

$$-123 = \frac{-123}{1}$$

Por ejemplo:

48 será igual a 48 dividido por 1
-123 es igual a -123 dividido por 1

Se observa también, que si realizamos la división 5 dividido por 2, el resultado es el número decimal 2,5.

Por lo tanto podemos identificar la fracción que escribiremos como:

$$\frac{5}{2} = 2{,}5$$

Exactamente ocurre en cualquier otro caso, de forma que podemos asegurar que **a cada fracción le corresponde un número decimal, que se obtiene sin más que dividir el numerador de la fracción por el denominador de la misma.**

La fracción $\frac{5}{2}$ = división 5 : 2

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 10 & 2{,}5 \end{array}$$

$$\frac{5}{2} = 2{,}5$$

A cada fracción le corresponde un número decimal, que se obtiene haciendo la división

Vemos abajo un par de ejemplos:

$\frac{8}{10} = 0{,}8$ porque $\begin{array}{r|l} 8 & 10 \\ \hline 0 & 0{,}8 \end{array}$

$-\frac{32}{25} = -1{,}28$ porque $\begin{array}{r|l} 32 & 25 \\ \hline 70 & 1{,}28 \\ 200 & \\ 00 & \end{array}$

Actividades

1. En el siguiente cuadro coloque una cruz en cada uno de los conjuntos de números a los que pertenece cada uno de los siguientes números:

	Natural	Entero	Anterior	Posterior
-1/7				
12.00007				
653				
-42				
3,1416				
3,0111111....				
4,44444.......				

2. Encuentre el decimal correspondiente a cada una de las siguientes fracciones:

a) $= \frac{2}{5}$

b) $= \frac{30}{60}$

Ejercicios

Jerarquía de las operaciones

Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $8 + 2 \cdot 10 =$

b) $5 \cdot 4 + 4 =$

c) $(1 + 4) \cdot 3 =$

d) $20 : 4 + 6 =$

e) $(4 + 10) : 2 =$

f) $15 : 3 + 12 =$

Calcule respetando la prioridad de las operaciones:

a) $6 + 4 \cdot 3 - 2 =$

b) $10 - 10 : 2 + 15 : 3 + 4 \cdot 4 =$

c) $6 + 4 \cdot (5 - 3 + 8) =$

d) $5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 2 \cdot 6 =$

e) $(4 + 8 - 3 + 5) \cdot 4 + 2 =$

f) $(6 + 8) : 2 + 18 : (5 + 4) =$

Potencias de números naturales

Calcule el valor de las siguientes potencias:

a) 2^3

b) 5^2

c) 3^4

d) 11^3

Calcule el valor de x en cada caso:

a) $x^5 = 32$

b) $x^3 = 1000$

c) $x^2 = 625$

d) $5^x = 125$

Raíces de números naturales

Calcule las siguientes raíces cuadradas

a) $\sqrt{169}$

b) $\sqrt{25}$

c) $\sqrt{400}$

d) $\sqrt{10000}$

Jerarquía de las operaciones. Uso del paréntesis

Realice las siguientes operaciones respetando la prioridad de operaciones:

a) $2 + 5 \cdot \sqrt{25} -3 \cdot (23 -2 \cdot \sqrt{4})$

b) $5 \cdot \sqrt{49} -52 + 3 \cdot (8-2 \cdot \sqrt{9})$

c) $2 + 5 \cdot \sqrt{25} -3 \cdot (23-2 \cdot \sqrt{4})$

d) $5 \cdot \sqrt{49} -52 + 3 \cdot (8-2 \cdot \sqrt{9})$

Propiedades de las potencias

Calcule las siguientes expresiones:

a) $2^4 \cdot 2^2$

b) $3^3 \cdot 3^{26}$

c) $5^7 : 5^6$

d) $10^8 : 10$

e) $(2^5 \cdot 2^3) : 2^6$

f) $(5^4 : 5^3) \cdot 5^2$

g) $(2^{10} : 2^4) : 2^3$

h) $(6^3 \cdot 6^5) : (6^2 \cdot 6^5)$

i) $(3^2)^2$

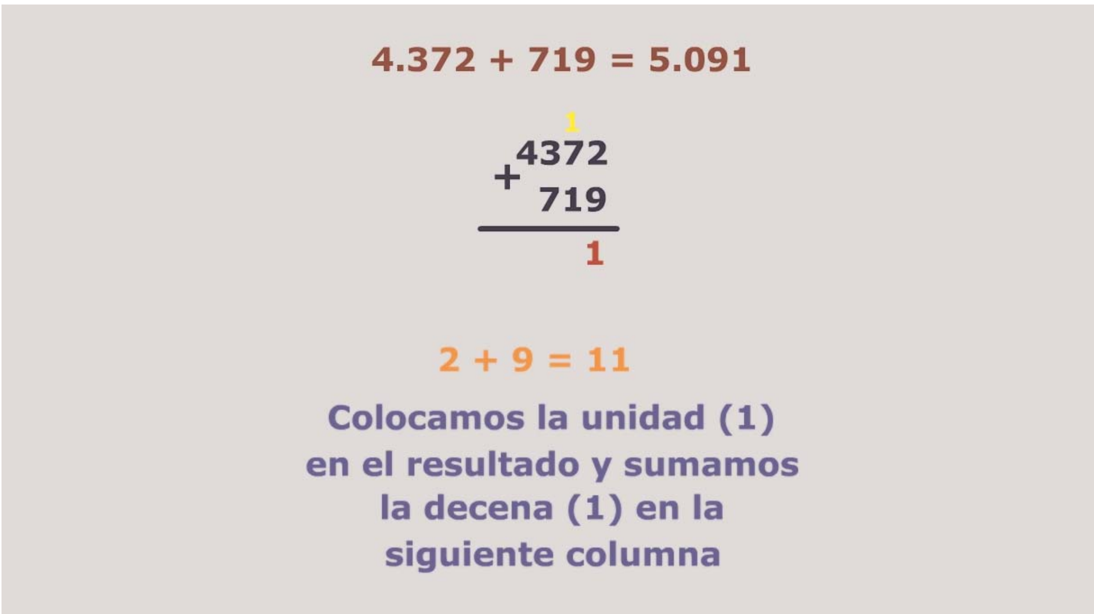
NÚMEROS NATURALES

En esta sección vamos a recordar las operaciones con números naturales, sobradamente conocidas (suma, resta, producto y división). También, trabajaremos el concepto de potencia, sus propiedades y una ligera noción de la raíz cuadrada.

Es importante que se tenga claro que las operaciones deben realizarse con un cierto orden, que se estudiará con detalle en el apartado de "Jerarquía de las operaciones".

Operaciones con números naturales

Suma



Resta

4.372 - 719 = 3.653

```
 4372
-  1
  719  ← sustraendo
 ----
    3
```

Como 2 es más pequeño que 9,
le sumamos 10 (2+10=12)
12 - 9 = 3

Colocamos la unidad (3)
en el resultado y sumamos
la decena que habíamos
añadido (1) en el
sustraendo de la siguiente
columna (1+1=2)

Multiplicación

37,2 x 7,19

```
   37,2
 x 7,19
 ------
   3348
   312
 2204
 ------
  27608
```

Entre multiplicando y multiplicador
hay 3 números decimales, que
señalamos en el resultado

División

```
34874 |12
108    ----
  074  296
    2
```

12 . 6 = 72
74 - 72 = 2

6 va al cociente y
2 al resto

Recuerde

Los números naturales los utilizamos para contar, ordenar, etc...
y se designan con la letra N:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5... 20... 400... 1234... 660.523...}

A veces, cuando operamos con números naturales, el resultado no puede expresarse con otro *número natural*

Por ejemplo, en la resta

$$\begin{array}{r} 30 \\ -\;50 \\ \hline -20 \end{array}$$

El resultado no es ninguno número natural

Necesitamos, entonces, un *número entero*

Z = {-478... -10... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3... 10... 478...}

Actividades

Realice las siguientes operaciones de números naturales:	
a) 45728 + 31950 =	b) 65180 + 527 + 987652 =
c) 38921 – 4567 =	d) (3572 + 7981)- (523 – 182) =
a) 4315 · 7126 =	b) 8325 · 1000 =
a) 3845 : 72 =	b) 562300 : 1632 =

Sabiendo que en una división el cociente es 83, el divisor es 45 y el resto 12, halle el dividendo

Potencias de números naturales. Propiedades.

Para indicar de forma abreviada la multiplicación o producto repetido del mismo número o factor utilizamos una forma de escribir especial.

Ejemplos:

a) 4 · 4 · 4 · 4 · 4 = 45 Se lee "cuatro elevado a cinco". Base 4, exponente 5.

b) 7 · 7 = 72 Se lee "siete elevado a dos" o "siete al cuadrado". Base 7, exponente 2.

c) a · a · a · a · a · a · a · a = a8 Se lee "a elevado a 8" o "a a la ocho". Base a, exponente 8.

Potencias de los números naturales

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 15$$

5^3 quiere decir que la base 5 se multiplica por si misma 3 veces

Propiedades de las potencias

1. Potencia de un producto: Es igual al producto o multiplicación de las potencias de los factores.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(3 \times 2)^3 = 3^3 \times 2^3$$

Comprobación...

Procedimiento 1

$$(3 \times 2)^3 \downarrow \quad 6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

Procedimiento 2

$$(3 \times 2)^3 = 3^3 \times 2^3 = \underbrace{(3 \times 3 \times 3)}_{27} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{8} = 216$$

2. Potencia de un cociente: Es igual al cociente de las potencias del dividendo y divisor.

$$(a : b)^n = a^n : b–$$

$$(6 : 2)^3 = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3 : 2^3 = \frac{6^3}{2^3}$$

Comprobación...

Procedimiento 1

$$(6 : 2)^3 \downarrow \quad 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

Procedimiento 2

$$(6 : 2)^3 = 6^3 : 2^3 = \underbrace{(6 \times 6 \times 6)}_{216} : \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{8} = 27$$

3. Producto de potencias de la misma base: al multiplicar dos potencias de la misma base el resultado se puede expresar como una potencia de la misma base y de exponente la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$

Comprobación...

Procedimiento 1

$3^2 \times 3^4$

$\downarrow$

$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$

Procedimiento 2

$3^2 \times 3^4 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$9 \times 81 = 729$

4. Cociente de potencias de la misma base: al dividir dos potencias de la misma base el resultado se puede expresar como una potencia de la misma base y de exponente la resta de los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$3^4 : 2^2 = 3^{4-2} = 3^2$

Comprobación...

Procedimiento 1

$3^4 : 2^2$

$\downarrow$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

Procedimiento 2

$3^4 : 2^2 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) : (3 \times 3)$

$81 : 9 = 9$

5. Potencia de una potencia: al elevar una potencia a otra potencia el resultado se puede expresar como una potencia de la misma base y de exponente el producto o multiplicación de los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$

Comprobación...

Procedimiento 1

$(3^2)^4$

$\downarrow$

$3^8 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 6.561$

Procedimiento 2

$(3^2)^4 = (3 \times 3)^4 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6.561$

6. Potencia de exponente cero: la potencia de exponente 0 y base distinta de 0 vale siempre 1.

$6^0 = 1$

$3^0 = 1$

Actividades

1. Calcule las siguientes potencias

3^4 ______ ; 12^3 ______ ; 100_5 ______ ; 197_2 ______

2. Calcule, por separado, y compare el resultado de las siguientes parejas de potencias

a) $(3 \cdot 4)^3$	$3^3 \cdot 4^3$
b) $(10 : 5)^4$	$10^4 : 5^4$

Aplicando las propiedades de las potencias expresa el resultado mediante una sola potencia

a) $7_6 \cdot 7^2$

b) $10^{12} \cdot 10^9$

c) 74^0

d) 5^1

e) $3^5 : 3$

f) $500^8 : 500^7$

g) $a^6 \cdot a^4 \cdot a$

h) $(3^2)^7$

i) $(2^7 \cdot 2^6) : 2^3$

j) $(2^7 : 2^3) \cdot (2^0 \cdot 2^2)$

k) $(a^3 \cdot a)^2$

Raíces cuadradas de números naturales

La raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado:

La raíz cuadrada de 9 (que se escribe $\sqrt{9}$)
es el número que al elevarlo al cuadrado nos da 9.
Este número es 3.

La raíz cuadrada de 25 (que se escribe $\sqrt{25}$)
es el número que al elevarlo al cuadrado nos da 25.
Este número es 5.
Por lo tanto escribimos $\sqrt{25 = 5}$

Se define raíz cuadrada de a (que se escribe $\sqrt{a}$)
como el número que al elevarlo al cuadrado nos da “a”.
Es decir: $\sqrt{a = b \leftrightarrow a{=}b^2}$

Actividades

1. Calcule

a) $\sqrt{169}$

b) $\sqrt{400}$

c) $\sqrt{1}$

d) $\sqrt{0}$

e) $\sqrt{10000}$

f) $\sqrt{b^6}$

2. Halle los números cuyos cuadrados son

a) 25	d) 1
b) 36	e) 0
c) 1000000	f) 49

3. La superficie de un cuadrado mide 400 m². Halla la longitud del lado

Jerarquía de operaciones. Uso del paréntensis.

Las operaciones tienen un orden de prioridad por lo que hay que realizarlas o ejecutarlas siguiendo este orden:

Dos ejemplos de resolución de operaciones

Orden para resolver operaciones

1º Realizar las operaciones que hay entre paréntesis
2º Realizar las potencias y raíces, si las hay
3º Realizar las multiplicaciones y las divisiones
4º Realizar las sumas y las restas

	$4 \times 3 + (3 + 2) - (8 - 6) : 2$
Resolver los paréntesis	$4 \times 3 + 5 - 2 : 2$
Resolver las divisiones y multiplicaciones	$12 + 5 - 1$
Resolver las sumas y las restas	16

	$3 \times 2^2 + 3 \times (5 + 2) - 2 \times (7 - 3)$
1º Resolver los paréntesis	$3 \times 2^2 + 3 \times 7 - 2 \times 4$
2º Resolver las potencias	$3 \times 4 + 3 \times 7 - 2 \times 4$
3º Resolver las divisiones y multimplicaciones	$12 + 21 - 8$
4º Resolver las sumas y las restas	25

Actividades

Realice los siguientes cálculos

a) $2 \cdot 3 + 8 \cdot 3 - 5 \cdot 3 =$

b) $8 \cdot (7 - 3) =$

c) $(9 + 3) \cdot 5 =$

d) $(9 - 6) \cdot (5 + 3) - 9 : 3 =$

e) $(5 \cdot 3 - 4 \cdot 2) \cdot 2 + 5 =$

f) $(8 - 2 \cdot 2 + 3 - 15 : 3) : (30 : 15) =$

Ejercicios

Jerarquía de las operaciones

Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $8 + 2 \cdot 10 =$

b) $5 \cdot 4 + 4 =$

c) $(1 + 4) \cdot 3 =$

d) $20 : 4 + 6 =$

e) $(4 + 10) : 2 =$

f) $15 : 3 + 12 =$

Calcule respetando la prioridad de las operaciones:

a) $6 + 4 \cdot 3 - 2 =$

b) $10 - 10 : 2 + 15 : 3 + 4 \cdot 4 =$

c) $6 + 4 \cdot (5 - 3 + 8) =$

d) $5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 2 \cdot 6 =$

e) $(4 + 8 - 3 + 5) \cdot 4 + 2 =$

f) $(6 + 8) : 2 + 18 : (5 + 4) =$

Potencias de números naturales

Calcule el valor de las siguientes potencias:

a) 2^3

b) 5^2

c) 3^4

d) 11^3

Calcule el valor de x en cada caso:

a) $x^5 = 32$

b) $x^3 = 1000$

c) $x^2 = 625$

d) $5^x = 125$

Raíces de números naturales

Calcule las siguientes raíces cuadradas

a) $\sqrt{169}$

b) $\sqrt{25}$

c) $\sqrt{400}$

d) $\sqrt{10000}$

Jerarquía de las operaciones. Uso del paréntesis

Realice las siguientes operaciones respetando la prioridad de operaciones:

a) $2 + 5 \cdot \sqrt{25} -3 \cdot (23 -2 \cdot \sqrt{4})$

b) $5 \cdot \sqrt{49} -52 + 3 \cdot (8-2 \cdot \sqrt{9})$

c) $2 + 5 \cdot \sqrt{25} -3 \cdot (23-2 \cdot \sqrt{4})$

d) $5 \cdot \sqrt{49} -52 + 3 \cdot (8-2 \cdot \sqrt{9})$

Propiedades de las potencias

Calcule las siguientes expresiones:

a) $2^4 \cdot 2^2$

b) $3^3 \cdot 3^{26}$

c) $5^7 : 5^6$

d) $10^8 : 10^6$

e) $(2^5 \cdot 2^3) : 2^6$

f) $(5^4 : 5^3) \cdot 5^2$

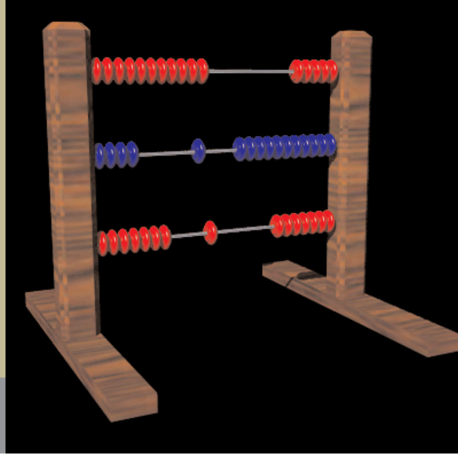
g) $(2^{10} : 2^4) : 2^3$

h) $(6^3 \cdot 6^5) : (6^2 \cdot 6^5)$

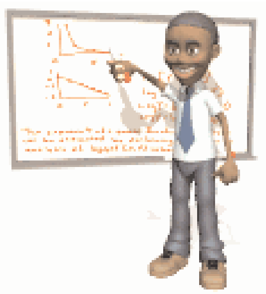
i) $(3^2)^2$

DIVISIBILIDAD. NÚMEROS ENTEROS

2



INTRODUCCIÓN



En esta unidad vamos a trabajar la **divisibilidad** y los **números enteros.**

La **divisibilidad** vamos aprender cuando un número es divisible por otro y a hallar el máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Todo esto te ayudará a resolver problemas y a operar con fracciones en la siguiente unidad.

El concepto de **número entero** es sencillo (te lo explicamos con el ejemplo de la economía doméstica (lo que gano y lo que gasto), pero la operación con enteros suele costar al principio, en especial, la prioridad de operaciones (primero sumar y restar y luego multiplar y divisidr) y los paréntesis (para cambiar el orden de prioridad). Con un poco de paciencia y prestando especial atención a estas cuestiones, lo aprenderás sin dificultad.

Los números naturales son números enteros y positivos (0, 1, 2, 3, 4...) y se empezaron a utilizar para contar cosas del medio natural indivisible, como ovejas, personas, dedos... La operación de la resta, como veremos, no obligó a ampliar el campo de los números, puesto que con los números naturales no podíamos resolver operaciones como 4 – 10.

DIVISIBILIDAD

En esta sección vamos a trabajar el tema de la divisibilidad. Múltiplos y divisores, números primos y compuestos y máximo común divisor y mínimo común múltiplo son herramientas que te servirán para operar con fracciones (unidad siguiente) y te permitirán resolver problemas como el siguiente:

Un cometa es visible desde la tierra cada 16 años, y otro, cada 24 años. El último año que fueron visibles conjuntamente fue en 1968 ¿En qué año volverán a coincidir?

Múltiplos y divisores

Si la división "a : b" es exacta, se dice:

"a" es **múltiplo** de "b"
"a" es **divisible** por "b"
"b" es **divisor** de "a"

Ejemplo 2

Ejemplo 1

$60 = 4 \cdot 15$ y por lo tanto podemos decir:

60 es **múltiplo** de 4 y de 15
60 es **divisible** por 4 y por 15
4 y 15 son **divisores** de 60

Actividades

De los números 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12, 16, 24, 36 ¿Cuáles son divisores de 36?

Complete las siguientes frases

a) 400 es ______________ de 80, porque $400 = 80 \cdot$ ________

b) 500 es ______________ por 25, porque ________ $= 25 \cdot$ ________

c) 60 es ______________ de 1200. porque $1200 =$ ________ $\cdot$ ________

Al dividir el número 300 entre 12 se obtiene de resto 0 y cociente 15
Es decir, $300 = 12 \cdot 25$
A partir de esta información complete con las palabras *múltiplo* o *divisor* las siguientes frases

a) El número 300 es ______________ del número 12

b) El número 12 es ______________ del número 300

c) El número 25 es ______________ del número 300

d) El número 300 es ______________ del número 25

Criterios de divisibilidad

Un número es divisible por (o múltiplo de)

DOS: Si acaba en cifra par (0,2,4,6,8)
TRES: Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3
CINCO: Si acaba en 0 o en 5

Ejemplo 1

42 es múltiplo de 2, porque acaba en número par.
42 es múltiplo de 3, porque la suma de sus cifras es $4 + 2 = 6$, es múltiplo de 3.
42 no es múltiplo de 5, porque no acaba ni en 0 ni en 5.

Ejemplo 2

465 no es múltiplo de 2, porque no acaba en número par
465 es múltiplo de 3, porque la suma de sus cifras es $4 + 6 + 5 = 15$, es múltiplo de 3
465 es múltiplo de 5, porque acaba en 5

Ejemplo 3

91 no es múltiplo de 2, porque no acaba en número par
91 no es múltiplo de 3, porque la suma de sus cifras $9 + 1 = 10$, no es múltiplo de 3
91 no es múltiplo de 5, porque no acaba ni en 0 ni en 5

Actividades

1. Complete la siguiente tabla, utilizando los criterios de divisibilidad cuando se pueda:

75	42	30	28	Divisor
NO		SI		2
				3
				5
				7

2. Complete la siguiente tabla:

Número	¿Divisible por 4?	Comprobación	¿Múltiplo de 3?	Comprobación
28	SI	$28 = 4 \cdot 7$	NO	$2 + 4 = 10$
315				
64				
90				
1240				
72				

3. Complete la siguiente tabla

Número	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
342		SI								
176										
600										
343										
525										
1320										

4. Escriba todos los divisores de los siguientes números: 9; 15; 16; 42; 60

Números primos y compuestos

Números primos: Son aquellos que sus únicos divisores son el 1 y él mismo.

Ejemplos:
7, 13, 17, 41
Los números primos menores que 100 son:
1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67;71;73;79;83;89;97

Números compuestos: Son aquellos que tienen algún divisor distinto de él mismo y del 1

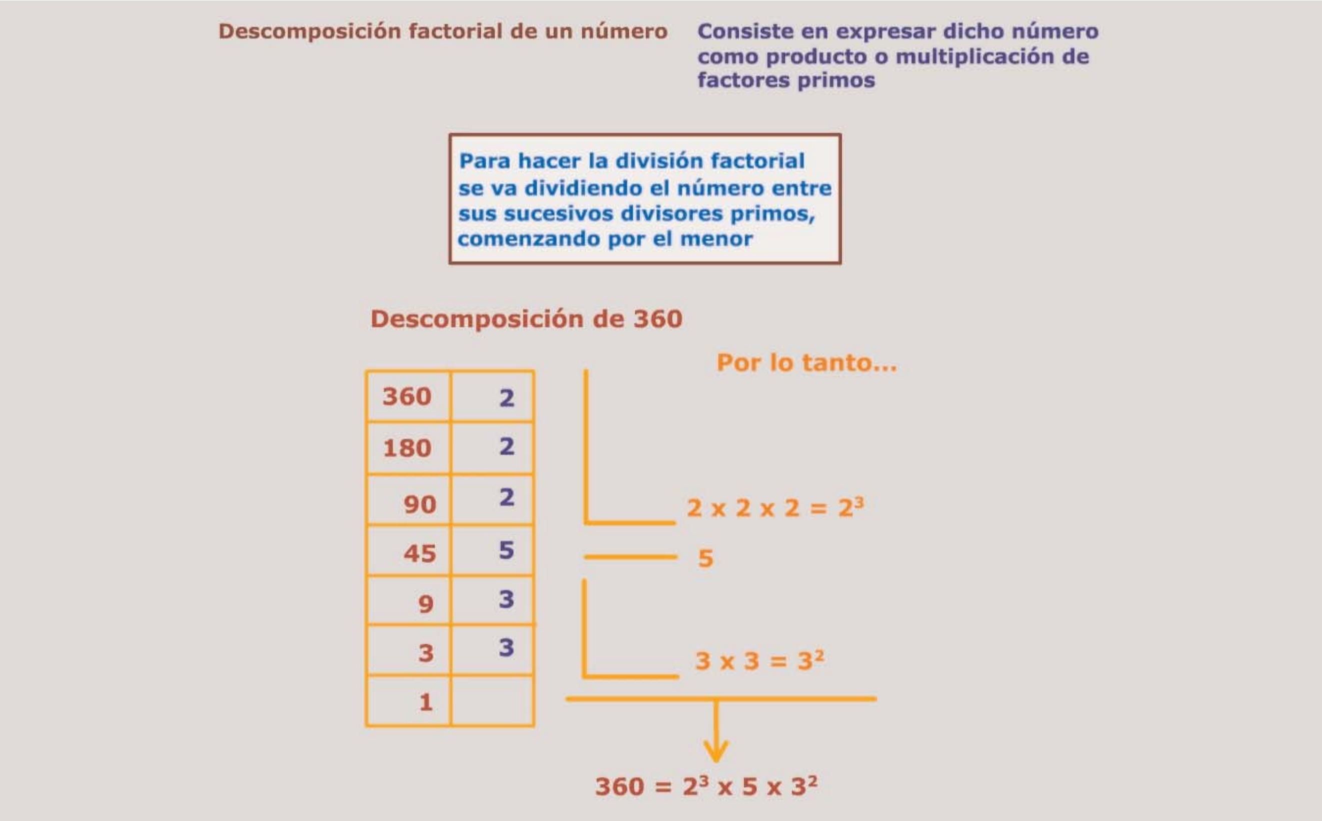
Ejemplos de números compuestos:
12, 45, 69, 33

12 tiene por divisores 1; 2; 3; 4; 6; 12
45 tiene por divisores 1; 3; 5; 9; 45
69 tiene por divisores 1; 3; 23; 69
33 tiene por divisores 1; 3; 11; 33

Descomposición de un número en producto de factores primos

Consiste en *expresar dicho número como producto de factores primos.* También se llama descomposición factorial del número.

Para conseguir la descomposición factorial se va dividiendo el número entre sus sucesivos divisores primos (aquellos que solo son divisibles por 1 o por sí mismos).



Actividades

Descomponga en factores primos	
a) 12	d) 143
b) 50	e) 450
c) 180	f) 1188

¿Qué números tienen las siguientes descomposiciones factoriales?	
a) $2 \cdot 3^2$	d) $2 \cdot 3^3 \cdot 5$
b) $3^2 \cdot 5$	e) $3^2 \cdot 5 \cdot 7$
c) $2^3 \cdot 7$	f) $2 \cdot 3 \cdot 11$

De los siguientes números, diga cuáles son primos y cuáles compuestos:	
a) 5	d) 101
b) 22	e) 36
c) 89	f) 41

Máximo común divisor

El máximo común divisor de varios números (M.C.D.) es *el mayor de los divisores comunes de dichos números.*

Para calcularlos se descompone cada número en producto de factores primos y el M.C.D. se forma con el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

Cálculo del MCD de 30, 36 y 6

MCD (36, 30, 6)

Descomposición factorial de los números:

$36 = 2^2 \times 3^2$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$6 = 2 \times 3$

Los números que se repiten con menor exponente son:

2×3

↓

MCD (36, 30, 6) = $2 \times 3 = 6$

Máximo Común Divisor (MCD) → el M.C.D de varios números es el mayor de los divisores comunes de dichos números

1. Se descompone cada número en el *producto de factores primos*
2. Se buscan los factores *primos comúnes más bajos* elevados a la *potencia más baja*

Cálculo del MCD de 24 y de 20

Descomposiciones factoriales de los números

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

20	2
10	2
5	5
1	

$24 = 2^3 \times 3$ $\qquad$ $20 = 2^2 \times 5$

Comparamos las dos descomposiciones factoriales

Obtenemos los factores primos más bajos elevados a la potencia más baja que aparecen en las dos composiciones

$24 = 2^3 \times 3 = \boxed{2 \times 2} \times 2 \times 3$

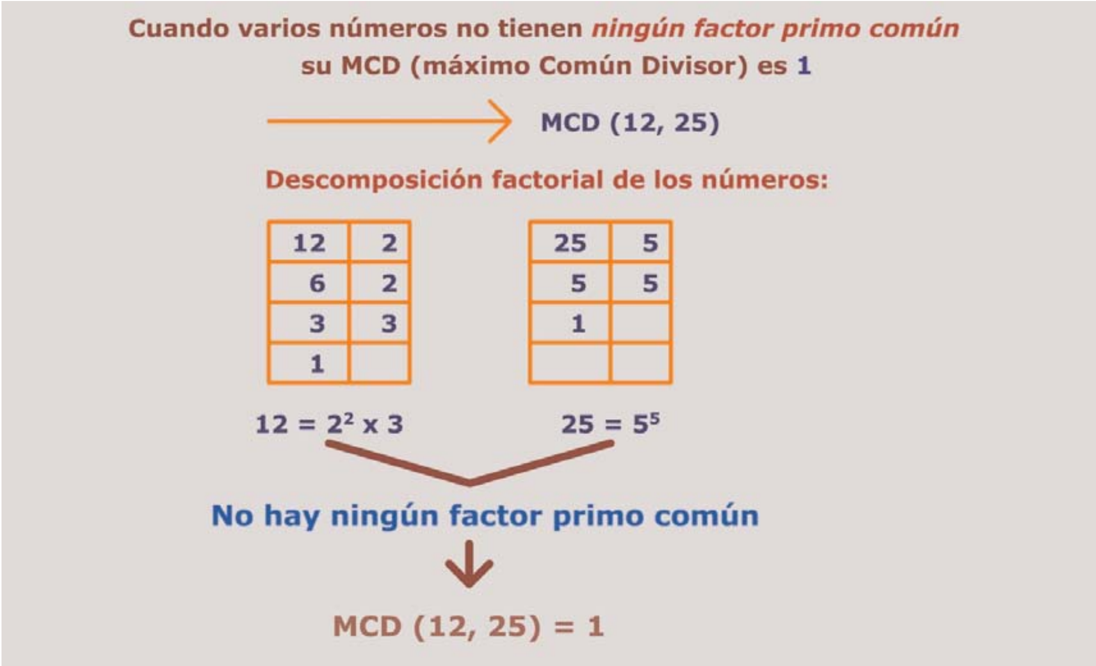
$20 = 2^2 \times 5 = \boxed{2 \times 2} \times 5$

$2 \times 2 = 2^2$

↓

El MCD de 24 y 20 es $2 \times 2 = 2^2$

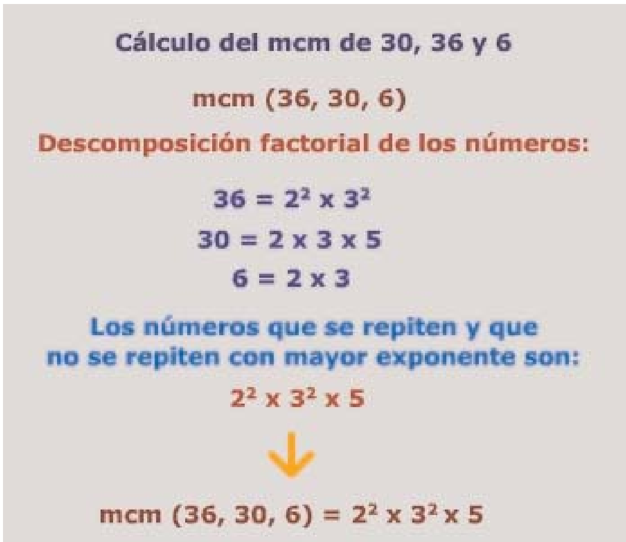
Si los números no tienen ningún factor primo común el máximo común divisor es el 1.



Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de varios números (m.c.m.) es *el menor de los múltiplos comunes de dichos números.*

Para calcularlos se descompone cada número en producto de factores primos y el m.c.m. se forma con el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.



Mínimo Común Múltiplo (mcm) → **es el menor de los múltiplos comunes de dichos números**

1. Se descompone cada número en el *producto de factores primos*
2. Se multiplican los factores *primos comunes y no comunes* elevados al *mayor exponente*

Cálculo del mcm de 24 y de 20

Descomposiciones factoriales de los números

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$24 = 2^3 \times 3$

20	2
10	2
5	5
1	

$20 = 2^2 \times 5$

Comparamos las dos descomposiciones factoriales

Obtenemos los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente

$24 = 2^3 \times 3$

$20 = 2^2 \times 5$

$\text{mcm}(24, 20) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$

Actividades

Calcule, para las siguientes parejas de números, el M.C.D y el m.c.m

a) 30 y 20
b) 8 y 18
c) 45 y 90
d) 48 y 35
e) 300 y 120
f) 1080 y 2250

Calcule, para los siguientes trios de números, el M.C.D y el m.c.m

a) 4; 6; 12
b) 12; 18; 24
c) 9; 14; 15
d) 60; 72; 90
e) 132; 176; 220

Ejercicios

1. Busque todos los divisores de 20

2. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 2, 3, 5 y 11?

   a) 12
   b) 48
   c) 1320
   d) 7381
   e) 5555
   f) 9

3. Indique si es verdadero (V) o falso (F) y razónelo

   a) Los números primos no tienen divisores
   b) Un número es divisor de sí mismo
   c) El 1 es divisor de cualquier número
   d) Un múltiplo de 6 es siempre múltiplo de 3
   e) Un divisor de 12 también lo es de 36

4. Indique, para cada caso, un valor que pueda tomar la letra para que sean ciertas las afirmaciones siguientes:

   a) 2c es múltiplo de 3
   b) 58p es múltiplo de 2 y de 5
   c) 25a es múltiplo de 2
   d) 72m es múltiplo de 3 y de 5

5. Halle la descomposición factorial de los siguientes números:

   a) 95
   b) 46
   c) 540
   d) 1400
   e) 2005

6. Calcule el mcm y el MCD de:

   a) 310 y 180
   b) 28; 35 y 140

7. Escriba un número de cuatro cifras que sea a la vez múltiplo de 3 y de 5

8. Un bidón contiene 140 litros de zumo de naranja, y otro 352 de manzana. Diga qué tamaño tendría que tener una botella, lo más grande posible, que sirviese para envasar los dos zumos, por separado, de manera que quepa justo el líquido en ellas.

9. Un cometa es visible desde la tierra cada 16 años, y otro, cada 24 años. El último año que fueron visibles conjuntamente fue en 1968 ¿En qué año volverán a coincidir?.

NÚMEROS ENTEROS

En esta sección vamos a trabajar los números enteros. Se han procurado explicar minuciosamente las distintas operaciones para que se entienda bien el proceso a seguir en cada caso. Debido a su dificultad, se han propuesto gran cantidad de ejercicios para que cada uno realice los que considere necesarios.

Número entero y su opuesto. Recta numérica

El conjunto de los números enteros está formado por:

$$Z = \{....-53,....-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,.....835....\}$$

Un número entero...

Se define opuesto del número + 7 y se escribe:
op (+ 7) = -7

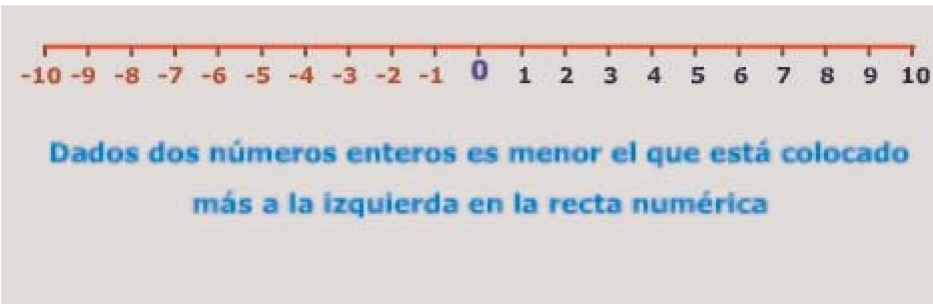
Se define opuesto del número -4 y se escribe:
op (-4) = + 4

En general, se define opuesto del número + a y se escribe:
op (+ a) = -a

En general, se define opuesto del número -a y se escribe:
op (-a) = + a

Orden en los números enteros

Los números enteros se representan ordenados en la recta numérica:



Suma y resta de dos números enteros

Para entender bien la suma de números enteros, empezaremos operando sólo con dos números.

Asociaremos:

5 ♦ tengo 5. (Número entero *positivo*: TENGO)

-3 ♦ debo 3. (Número entero *negativo*: DEBO)

Ejemplo 1

$$3 + 5 = 8 \quad \begin{Bmatrix} \text{tengo } 3 \\ \text{tengo } 5 \end{Bmatrix}$$

finalmente tengo 8
resultado 8

Ejemplo 2

$$-5 + 4 = -1 \quad \begin{Bmatrix} \text{debo } 5 \\ \text{tengo } 4 \end{Bmatrix}$$

finalmente debo 1
resultado -1

Ejemplo 3

$$-2 - 8 = -10 \quad \begin{Bmatrix} \text{debo } 2 \\ \text{debo } 8 \end{Bmatrix}$$

finalmente debo 10
resultado -10

Ejemplo 4

$$8 - 5 = 3 \quad \begin{Bmatrix} \text{tengo } 8 \\ \text{debo } 5 \end{Bmatrix}$$

finalmente tengo 3
resultado 3

Ejemplo 5

$$7 - 12 = -5 \quad \begin{Bmatrix} \text{tengo } 7 \\ \text{debo } 12 \end{Bmatrix}$$

finalmente debo 5
resultado -5

Ejemplo 6

$$-3 + 8 = 5 \quad \begin{Bmatrix} \text{debo } 3 \\ \text{tengo } 8 \end{Bmatrix}$$

finalmente tengo 5
resultado 5

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios

a) 15 – 6

b) 4 + 8

c) -3 – 15

d) -7 + 15

e) 3 – 10

f) -7 + 7

g) -5 – 2

h) 9 + 15

Suma y resta de varios números enteros

-2 + 5 + 4 = 9 - 2 = 7

9 - 2 = 7

Cuando los números que entran en la operación son más de dos, empezaremos por agrupar los positivos y los negativos, es decir los que tengo y los que debo, procediendo seguidamente como en los casos anteriores.

5 - 6 - 3 = 5 - 9 = -4

-3 + 5 + 6 - 10 = 11 - 13 = -3

- Tengo 5 + 6 = 11
- Debo 3 + 10 = 13

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios

a) 7 + 2-5 + 12 =

b) 6-4 + 8 + 6 =

c) 5-13-15-2 =

d) 17-7 + 15 =

e) 8 + 3-10 =

f) 15-17 + 7 =

g) 6-5-2 + 9 =

h) 9 + 15-3-8 =

A veces nos encontraremos en las sumas y restas de números enteros, casos como los siguientes:

a) + 5 + (-3)
b) -3 + (+ 4)
c) + (+ 2) + (-5)
d) + 4 – (-2)
e) -(-4) + (-8)
f) -(-2) – (-5)

Resolución de los ejemplos

a) + 5 + (-3) = 5 – 3 = 2
b) -3 + (+ 4) = -3 + 4 = 1
c) + (+ 2) + (-5) = 2 – 5 = -3
d) + 4 – (-2) = 4 + 2 = 6
e) -(-4) + (-8) = 4 – 8 = -4
f) -(-2) – (-5) = 2 + 5 = 7

Para resolver esta situación se quitan paréntesis, para dejar las operaciones como las vistas anteriormente. Los casos posibles son:

- Si delante del paréntesis no hay ningún signo o hay un signo + se quita el paréntesis y se deja el signo del número

+(+5) = +5 (+a) = +a

(+2)=+2 (-a)=-a
+(+a)=+a (-3)=-3
+(-a)=-a +(-7)=-7

- Si delante del paréntesis hay un signo - se quitan los paréntesis y se pone el signo contrario al número

- (+5) = -5 - (-a) = +a

-(+a)=-a (-a)=-a
-(-3)=+3

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios

a) -3 + (-3)

b) + 5 + (-8)

c) -(+ 2)-(-12)

d) (+ 8)-(-2)

f) -(+ 7) + (-15)

g) (+ 9)-(+ 7)

h) (-5)-(+ 8)

i) (-9)-(-6)

Resumen:

Para sumar o restar varios números enteros se efectúan los pasos siguientes:

- Se quitan los par éntesis, si los hay, aplicando los casos anteriores.
- Se suman los positivos por un lado y los negativos por otro.
- Se restan los resultados y se pone el signo de mayor.

Ejemplos

(-5) + (-2) – (+ 8) – (-1) =
-5 – 2 – 8 + 1 = 1 -5 – 2 – 8
= 1 – 15 = -14

(+ 21) + (-8) – (+ 2) – (-5) =
+ 21 – 8 – 2 + 5 = 21 + 5 – 8 – 2
= 26 – 10 = 16

3 – (+ 8) – (3) + (-6) + (10) = 3 – 8 – 3 – 6 + 10 =
3 + 10 – 8 – 3 – 6 = 13 – 17 = -4

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios

a) -5 – (-8) – (-2) =

b) 14 + (-9) – 2 =

c) 3 – (-4) + 3 + (-6) – (-1) =

d) -18 + (+ 20) + (-17) – 3 =

e) -(-41) + 23 – (-14) – 3 + (-8) =

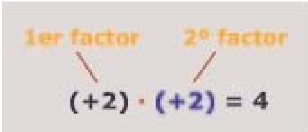
f) 30 – (12) – (-22) + (+ 18) =

g) -45 + (+ 51) – (-43) + 31 – (+ 22) -1 =

h) 5 – (-6) – 15 + (-21) + (3) – (-8) + 14 =

Multiplicación de números enteros

Para dos factores:



1. Si los factores tienen el mismo signo, el resultado es positivo

$$\begin{cases} (+) \cdot (+) = + \\ (-) \cdot (-) = + \end{cases}$$

Ejemplos

(+ 5) · (+ 3) = + 15
(-5) · (-6) = + 30
12 · 2 = 24

2. Si los factores tienen el distinto signo, el resultado es negativo

$$\begin{cases} (+) \cdot (-) = - \\ (-) \cdot (+) = - \end{cases}$$

Ejemplos

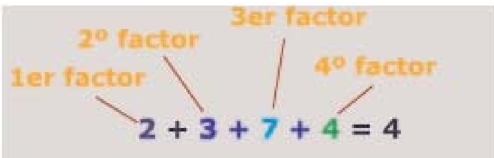
(+ 5) · (-3) = -15
(-5) · (+ 6) = -30
-5 · 7 = -35

Estamos utilizando la llamada “Regla de los signos”:

Regla de los signos

(+) · (+) = +
(-) · (-) = +
(+) · (-) = -
(-) · (+) = -

Para más de dos factores:



Se van multiplicando de dos en dos, utilizando la regla de los signos:

(+ 2) · (-4) · (+ 10) = (-8) · (+ 10) = -80
(-3) · (-6) · (-10) = (+ 18) · (-10) = -180
(-2) · (-7) · (+ 5) · (-4) = (+ 14) · (-20) = -280

Observaciones:

Hay situaciones en las que no está indicado expresamente el producto pero se sobreentiende.

$$4\ (-2) = 4 \cdot (-2) = -8$$

$$-3\ (2) = -3 \cdot (2) = -6$$
$$(-7)\ 3 = (-7) \cdot 3 = -21$$
$$(+\ 3)(+\ 2) = (+\ 3) \cdot (+\ 2) = 6$$

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios

a) $5 \cdot (+\ 7) =$

b) $4 \cdot (-8) =$

c)$4 \cdot (-3) \cdot (-5) =$

d) $7 \cdot (-4) \cdot 2 =$

e) $3 \cdot (-2) \cdot 5 =$

f) $-5 \cdot 3 \cdot (-7) =$

g) $5 \cdot (-3) \cdot 0 =$

h) $3\ (-2)(-4) =$

División de números enteros

Para dividir dos números enteros

1. Si tienen el mismo signo, el resultado es positivo

$$\begin{cases} (+) : (+) = + \\ (-) : (-) = + \end{cases}$$

Ejemplos

$$(+\ 15) : (+\ 3) = +\ 5$$
$$(-30) : (-5) = +\ 6$$
$$28 : 4 = 7$$

2. Si tienen el distinto signo, el resultado es negativo

$$\begin{cases} (+) : (-) = - \\ (-) : (+) = - \end{cases}$$

Ejemplos

$$(+\ 15) : (-3) = -5$$
$$(-30) : (+\ 5) = -6$$
$$-48 : 6 = -8$$

Estamos utilizando la llamada "Regla de los signos":

Regla de los signos

$$(+) \cdot (+) = +$$
$$(-) \cdot (-) = +$$
$$(+) \cdot (-) = -$$
$$(-) \cdot (+) = -$$

Para más de dos números

Se van dividiendo los dos primeros. El resultado de esta división se divide entre el tercero y así sucesivamente, utilizando la regla de los signos.

Lo único que modifica este orden son los paréntesis.

a) En varios productos seguidos el orden de operaciones NO importa:

40 · 4 · 2 =

Es igual 160 · 2 = 320 que 40 · 8 = 320

b) En varios cocientes seguidos el orden de operaciones SI importa:

40 : 4 : 2 =

No es igual 10 : 2 = 10 que 40 : 2 = 20

c) En cocientes y productos seguidos las operaciones se hacen en el orden en el que están escritas

12 · (-7) : 4 =

-84 : 4 =

-84 : 4 = -21

(+ 32) : (+ 2) : (+ 4) = (+ 16) : (+ 4) = + 4
(+ 32) : (-2) : (+ 4) = (-16) : (+ 4) = -4
(-40) : (-2) : (+ 5) : (+ 4) = (+ 20) : (+ 5) : (+ 4) = (+ 4) : (+ 4) = 1

Observaciones:

La división de dos números enteros no siempre es un número entero.

Por ejemplo:
1 : 2 = 0,5
15 : (-4) = -3,75

Estas divisiones dan como resultado un número decimal.

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios

a) 35 : (+ 7) =

b) 48 : (-2) : (-6) =

c) 63 : (-7) : 3 =

d) 15 : (-3) : 1 =

e) 6 · 5 : (+ 2) =

f) -4 · 16 : (-4) =

g) 40 : 5 · (-6) : 2 =

h 24 : (-8) =

i) 16 : (-4) : 2 =

j) -15 : 3 : (-5) =

k) 36 : (-2) : (-6) =

l) 24 : (-8) · 6 =

m) 6 · 12 : (-2) : (-6) =

n) -42 : (-2) · (-7) =

Potencias con base entera

Se define la potencia con un número entero “a” de base y de exponente el número natural “n” como:

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a$ n veces

Potencias de base positiva

La potencia de base positiva es siempre un número positivo.

Ejemplos

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$
$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Potencias de base negativa

Si el exponente es par el *resultado es positivo:*

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$
$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

Si el exponente es impar el *resultado es negativo:*

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8$$

Recordemos que $a^0 = 1$, para cualquier número entero a, distinto de 0

Propiedades

Las propiedades son las mismas que las de las potencias que tienen de base un número natural (páginas 18 y 19).

Ejemplos

$$(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^5 = -243$$
$$(-4)^5 : (-4)^3 = (-4)^2 = 16$$
$$((5)^2)^4 = (5)^8 = 390625$$

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios

a) $(-5)^4 \cdot (-5)^5 =$

b) $(-7)^8 : (-7)^5 =$

c) $12^9 : 12^0 =$

d) $13^6 \cdot (13^4 : 13^2) =$

e) $12^7 : 12^2 \cdot 12^2 : 12^3 =$

f) $(-9)^8 : (-9)^7 =$

g) $[(-2)^2]^4 =$

h) $(-4)^3 . (-5)^3 =$

Operaciones combinadas

Las operaciones tienen un orden de prioridad, por lo que hay que ejecutarlas. Este orden es:

- Primero: los paréntesis
- Segundo: potencias
- Tercero: multiplicaciones y divisiones
- Cuarto: las sumas y las restas

$$4 \cdot (-3) + (3 + 2) - (8 - 6) : (-2)$$
$$4 \cdot (-3) + 5 - 2 : (-2)$$
$$-12 + 5 + 1$$
$$-12 + 5 + 1 = -12 + 6 = -6$$

Veamos ahora dos ejemplos más:

Ejemplo 1

$$(-2 - 3) \cdot (-6 : 2) + 4 \cdot (3^2 - 2 \cdot 2) -(-6) : (2 + 1) =$$

1º Paréntesis

$$= (-5) \cdot (-3) + 4 \cdot (9 - 4) - (-6) : (3) =$$
$$= (-5) \cdot (-3) + 4 \cdot 5 - (-6) : (3) =$$

2º Multiplicaciones y divisiones

$$= 15 + 20 - (-2) =$$

3º Sumas y restas

$$= 15 + 20 + 2 = 37$$

Ejemplo 2

$$22 - 2 \cdot [4 - 6 - (9 - 1) + 6 : 2] =$$

1º Paréntesis del interior

$$= 22 - 2 \cdot [4 - 6 - 8 + 6 : 2] =$$

2º Paréntesis: división

$$= 22 - 2 \cdot [4 - 6 - 8 + 3] =$$

3º Paréntesis

$$= 22 - 2 \cdot (-7) =$$

4º Multiplicaciones y divisiones

$$= 22 + 14 =$$

5º Sumas y restas

$$= 22 + 14 = 36$$

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios

a) 23 – 5 (7 – 4) + 6 (5-2) =

b) 22 – 4 (9 – 3 · 2) + 7 · 4 =

c) 8 – (6 – (7 – 3) + 2) + 4 =

d) 22 – 2 [4 – 6 – (9 – 1) + 6 : 2] + 8 =

e) 4 (10 – 2 · 3) – 2 (15 : 3 – 3) + 4 (9 – 2) =

f) 8 + 2 (7 – 4 (3 – 1 · 5 + 2)) – 7 =

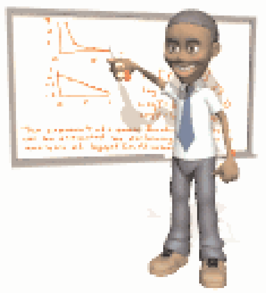
g) 4 – 23 + 5 · 3 + 8 : 22 – (-2) · (-3) =

h) 14 – 23 + 5 · 13 + 7 · (-2)2 – 4 · (-5) =

NÚMEROS DECIMALES Y FRACCIONES. PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

3

INTRODUCCIÓN



En esta unidad vamos a trabajar decimales y fracciones, en la primera parte, y proporcionalidad y porcentajes, en la segunda parte.

En esta unidad entramos de lleno en la vida cotidiana. Los problemas matemáticos que se plantean en la vida diaria son básicamente problemas de decimales, fracciones y porcentajes. En las rebajas nos hacen el 15%, los tipos de interés de las hipotecas están al 3,2% o una tercera parte del sueldo se gasta en alimentación son ejemplos del día a día. Pero, ¡ten cuidado!, los porcentajes nos pueden llevar a engaño: es muy importante fijarse en la base sobre la que se aplica el porcentaje. Si cobraba 1000 euros al mes y primero me rebajan el 10% y luego me suben el 10% no me quedo igual, acabo cobrando 99 euros. ¡Caramba cómo son las matemáticas!

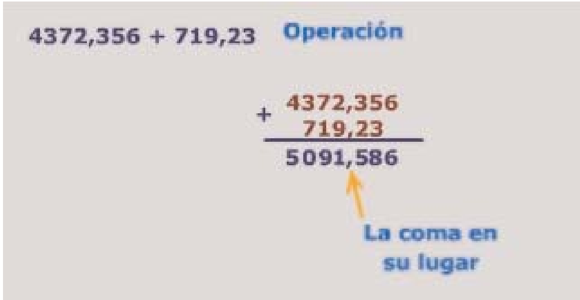
DECIMALES Y FRACCIONES

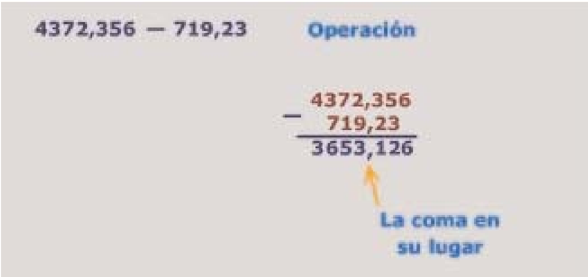
En esta unidad vamos a trabajar los números decimales y las fracciones, que son tanto unos como las otras, los números con los que trabajamos con más frecuencia, en cualquier ámbito, tanto científico como en la vida diaria. Por conocidas, sólo se ha hecho un ligero repaso de las operaciones con decimales, que además podemos realizar con calculadora. Se ha hecho más hincapié en la parte de fracciones, por su dificultad y su gran importancia en los estudios de cualquier ciclo.

Repaso de operaciones con números decimales

Recordamos las operaciones con números decimales con los siguientes ejemplos:

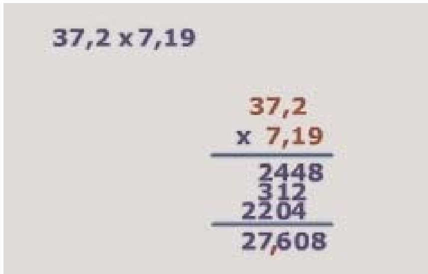
Para ver el ejemplo de la SUMA de números decimales, observa la ventana de al lado.

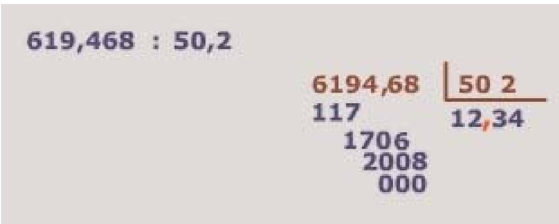




Para ver el ejemplo de la RESTA de números decimales, observa la ventana de al lado.

Para ver el ejemplo de la MULTIPLICACIÓN de números decimales, observa la ventana de al lado.





Para ver el ejemplo de la DIVISIÓN de números decimales, observa la ventana de al lado.

Actividades

Calcule las siguientes operaciones:

a) 1,56 + 2,458 =

b) 12,55 + 201,36 + 0,145 =

c) 22,48-15,321 =

d) 4,36-0,25 =

e) 156,3 + 32,84-11,906 =

f) 12,45 · 0,26 =

g) 15,023 · 101,3 =

h) (32,3 + 15,56) · 12,8 =

i) 9505:380,2 =

j) 852,72:15,2 =

Fracciones equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ son equivalentes si se verifica la siguiente igualdad $a \cdot d = b \cdot c$

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y b distinto de 0. A a se le llama **numerador** y a b se le llama **denominador**. Esta expresión se lee “a partido b” e indica el cociente de dichos números.

Ejemplo 1

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \text{ porque } 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$$

Ejemplo 2

$$\frac{-2}{5} = \frac{10}{-25} \text{ porque } -2 \cdot (-25) = 5 \cdot 10$$

Notas

1. Para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada podemos:

   a) multiplicar numerador y denominador por el mismo número.

   $$\frac{20}{27} = \frac{20-2}{27-2} = \frac{40}{54}$$

   b) dividir numerador y denominador por el mismo número, si tienen un divisor común.

   $$\frac{20}{18} = \frac{20:2}{18:2} = \frac{10}{9}$$

2. Para comprobar que dos fracciones son equivalentes siempre podemos aplicar la definición:

$$\frac{20}{27} = \frac{40}{54} \text{ son equivalentes porque } 20 \cdot 54 = 1080 = 40 \cdot 27$$

$$\frac{20}{18} = \frac{10}{9} \text{ son equivalentes porque } 20 \cdot 9 = 180 = 18 \cdot 10$$

Ejemplo: Hallar las fracciones equivalentes de $\frac{15}{18}$

$$\frac{15}{18} = \frac{15:3}{18:3} = \frac{5}{6} \text{ Esta es la fracción irreductible}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{15 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{30}{36}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{15 \cdot 5}{18 \cdot 5} = \frac{75}{90}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42}$$

Todas las fracciones obtenidas son equivalentes

Actividades

1. Obtenga dos fracciones equivalentes a las dadas:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{-6}{20}$

c) $\frac{42}{12}$

2. Halle, en cada caso, el valor de x para que estas igualdades sean ciertas.

a) $\frac{6}{4}=\frac{x}{6}$

b) $\frac{10}{15}=\frac{4}{x}$

c) $\frac{-36}{20}=\frac{9}{x}$

3. Encuentre las fracciones que

a) La fracción equivalente a $\frac{3}{7}$ que tenga por denominador 42

b) La fracción equivalente a $\frac{18}{12}$ que tenga por numerador 15

c) La fracción equivalente a $\frac{14}{10}$ que tenga por denominador 25

4. Complete los términos que faltan en las series de fracciones equivalentes:

a) $\frac{3}{5}=\frac{9}{}=\frac{}{25}=\frac{30}{}=\frac{}{100}$

b) $\frac{12}{42}=\frac{}{7}=\frac{4}{}=\frac{}{84}=\frac{36}{}$

Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es sustituirla por otra equivalente con los términos más sencillos. Para simplificar una fracción se divide numerador y denominador por un divisor común para ambos números o por el máximo común divisor de los mismos.

Ejemplos:

$$\frac{-9}{12} = \frac{-9:3}{12:3} = \frac{-3}{4}$$

$$\frac{20}{30}$$

Para simplificar una fracción se pueden seguir dos vías

Dividir el númerador y el denominador por el mismo número, hasta que no puedan simplificarse más

20 : 2 = 10
30 : 2 = 15
10 y 15 no son divibles por 2 ni por 3, ni por cuatro...
10 : 5 = 2
15 : 5 = 3

$$\frac{20}{30} = \frac{20:2}{30:2} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$$

Hallar el máximo común divisor

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array}$$

$20 = 2^2 \times 5$
$30 = 2 \times 3 \times 5$

MCD (20, 30) = 2 x 5 = 10

$$\frac{20}{30} = \frac{20:10}{30:10} = \frac{2}{3}$$

Si una fracción no se puede simplificar se dice que es IRREDUCIBLE. Esto ocurre cuando numerador y denominador sólo tienen por divisor común el 1.

Las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{-3}{4}$ obtenidas en los ejemplos anteriores son irreducibles.

Actividades

Simplifique las siguientes fracciones

a) $\frac{4}{8}$

b) $\frac{6}{8}$

c) $\frac{35}{45}$

d) $\frac{320}{400}$

e) $\frac{21}{63}$

f) $\frac{132}{156}$

Reducción de fracciones a común denominador

Reducir varias fracciones a común denominador es sustituirlas por otras equivalentes que tengan el mismo denominador. Para ello se hace:

1º Se calcula el m.c.m. de los denominadores.

Ejemplo

Reducir a común denominador las fracciones $\frac{-6}{20}; \frac{4}{9}; \frac{8}{15}$

$$\left.\begin{array}{r} 20 = 2^2 \cdot 5 \\ 9 = 3^2 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \text{m.c.m. } (20,9,15) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

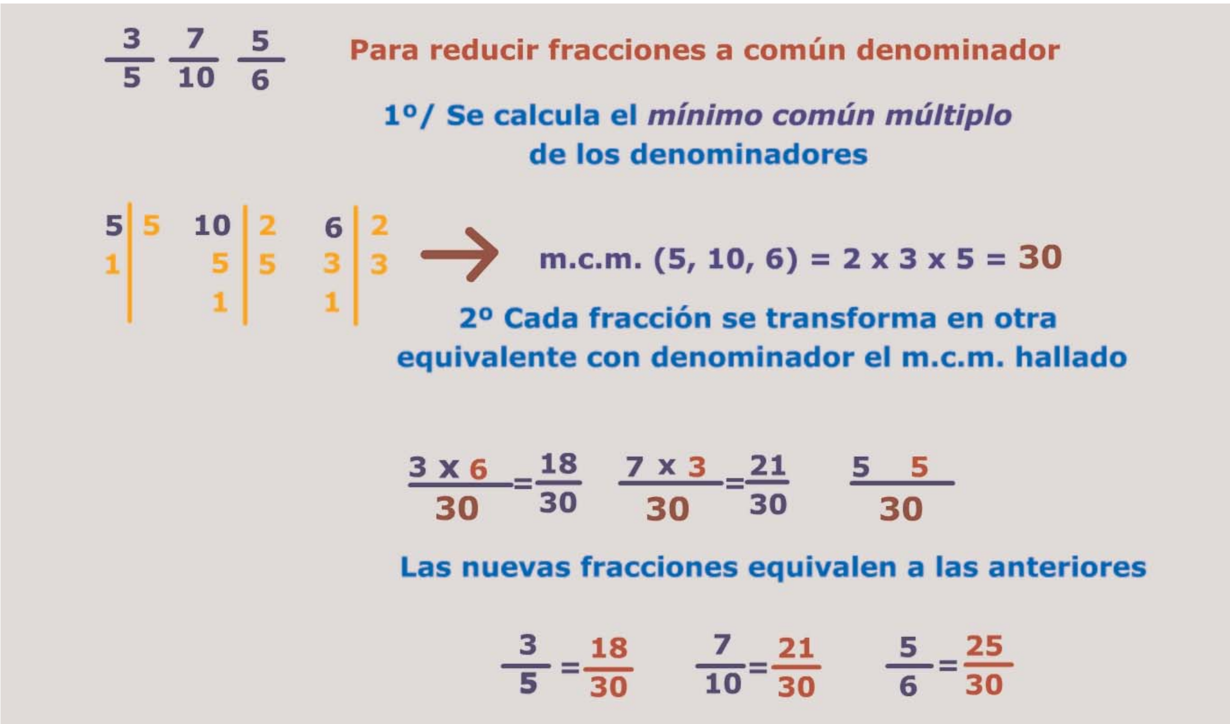
2º Cada fracción se transforma en otra equivalente con denominador el m.c.m. hallado.

$$\frac{-6}{20} = \frac{-6 \cdot 9}{20 \cdot 9} = \frac{-54}{180}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 20}{9 \cdot 20} = \frac{80}{180}$$

$$\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 12}{15 \cdot 12} = \frac{96}{180}$$

Las nuevas fracciones $\frac{-54}{180}; \frac{80}{180}; \frac{96}{180}$ son equivalentes a las primeras y tienen las tres el mismo denominador 180.



Actividades

1. Reduzca a común denominador:

a) $\frac{5}{6}; \frac{3}{5}$

b) $\frac{17}{12}; \frac{13}{9}$

c) $\frac{6}{5}; \frac{23}{10}; \frac{18}{20}$

2. Reduzca a común denominador:

a) $\frac{3}{2}; \frac{-5}{4}; \frac{15}{8}$

b) $\frac{5}{6}; \frac{3}{2}; \frac{7}{9}; \frac{9}{4}$

Suma y resta de fracciones

Con igual denominador: la suma o resta de fracciones con igual denominador es otra fracción que tiene por numerador la suma o resta de los numeradores, y por denominador el mismo denominador.

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

Con distinto denominador: para sumar o restar fracciones con distinto denominador empezamos por reducir las fracciones a común denominador.

$$\frac{4}{5} - \frac{9}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4-9+1}{5} = \frac{-4}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{3+2}{6} - \frac{3-2}{6} =$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$2 - \frac{3}{10} - \frac{1}{2} = \frac{2}{1} - \frac{3}{10} - \frac{1}{2}$$

m.c.m. (1, 2, 10) = 1 x 2 x 5 = 10

$$\frac{20}{10} - \frac{3}{10} - \frac{10}{10} = \frac{20-3-5}{10} =$$

$$= \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Actividades

Resuelva los siguientes sistemas de fracciones

a) $\frac{1}{2} + \frac{7}{3} - \frac{5}{4}$

b) $4 - \frac{6}{4} + \frac{6}{10} - \frac{5}{6}$

c) $\frac{6}{10} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right)$

d) $\frac{3}{5} - \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{6}\right)$

Producto y cociente de fracciones

PRODUCTO DE FRACCIONES: el producto de fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{20}{27} = \frac{20-2}{27-2} = \frac{40}{54}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{6}{9} = \frac{5 \times 6}{3 \times 9} = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$$

$$\frac{-3}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{-5}{7} = \frac{-3 \times 4 \times (-5)}{5 \times 3 \times 7} = \frac{60}{105} = \frac{4}{7}$$

COCIENTE DE FRACCIONES: el cociente de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto del numerador de la fracción dividendo por el denominador de la fracción divisor y por denominador el producto del denominador de la fracción dividendo por el numerador de la fracción divisor:

$$\frac{20}{27} = \frac{20-2}{27-2} = \frac{40}{54}$$

$$\frac{5}{3} : \frac{7}{6} = \frac{5 \times 6}{3 \times 7} = \frac{30}{21} = \frac{10}{7}$$

$$6 : \frac{2}{3} = \frac{6}{1} : \frac{2}{3} = \frac{6 \times 3}{1 \times 2} = \frac{18}{2} = 9$$

Obsérvese que $\frac{a}{b}$ es la fracción dividendo y $\frac{c}{d}$ es la fracción divisor.

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios:

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2}$

b) $\frac{4}{3} : \frac{10}{9}$

c) $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{-1}{6}$

d) $\frac{7}{3} : \frac{-5}{6}$

NOTA: cuando hay varios productos y divisiones encadenados sin paréntesis, se hacen en el orden en el que se encuentran:

$$\text{Ejemplo: } \frac{3}{4} : \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3-5}{4-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

OPERACIONES COMBINADAS: como para los tipos de números vistos anteriormente, hay que respetar la prioridad de operaciones, que es:

$$3 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) =$$

$$3 \times \left(\frac{13}{10}\right) - \left(\frac{27}{20}\right)$$

1º/ Paréntesis y dentro de los paréntesis, primero productos

Orden para resolver operaciones

1º Resolver las operaciones que hay entre paréntesis
2º Resolver las potencias y raíces
3º Resolver las multiplicaciones y las divisiones
4º Resolver las sumas y las restas

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{3} =$$

1º/ Se calcula el producto

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{10} - \frac{1}{3} =$$

2º/ Se operan sumas y restas

$$\frac{45}{30} + \frac{9}{30} - \frac{10}{30} = \frac{44}{30} = \frac{22}{15}$$

Actividades

Resuelva las siguientes actividades:

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}-\frac{5}{9}$

b) $\left(\frac{4}{10}-\frac{2}{12}\right)\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{5}$

c) $\dfrac{3-\frac{5}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}-2}$

Potencia de fracciones

Se define la potencia de una fracción de:base la fracción $\frac{a}{b}$ y exponente n como $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo 1

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{3^4}{5^4}=\frac{81}{625}$$

Ejemplo 2

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^3=\frac{(-2)^3}{3^3}=\frac{-8}{27}$$

Se define la potencia de base la fracción $\frac{a}{b}$ y exponente -n como

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}=\frac{b^n}{a^n}$$

Ejemplo 1

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5^2}{2^2}=\frac{25}{4}$$

Ejemplo 2

$$\left(\frac{-1}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{-1}\right)^2=(-3)^3=-27$$

Ejemplo 3

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\left(\frac{4}{3}\right)^1=\frac{4}{3}$$

Ejemplo 4

$$2^{-3}=\left(\frac{3}{1}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

Ejemplo 5

$$(-5)^{-2}=\left(\frac{1}{-5}\right)^2=\frac{1}{25}$$

Un caso particular muy importante es aquel en que la base es un número entero:

$$a^{-n}=\left(\frac{a}{1}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{n}=\frac{1}{a^n}$$

Las propiedades son las mismas que las de las potencias de base natural o entero.

Ejemplo 1

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 : \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{5-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

Ejemplo 2

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{5+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

Ejemplo 3

$$\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^2\right)^4 = \left(\frac{-1}{2}\right)^8$$

Ejemplo 4

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{4}{5} : \frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{12}{10}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5$$

Ejemplo 5

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6}\right)^5 = \left(\frac{4}{18}\right)^3 = \left(\frac{2}{9}\right)^3$$

Actividades

Resuelva los siguientes ejercicios:

a) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot 3$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 =$

c) $\left[\left(\left(\frac{-1}{5}\right)^3\right)^2\right]^4 =$

d) $\left(\frac{2}{7}\right)^5 : \left(\frac{2}{7}\right)^2 =$

e) $\frac{2^6 \cdot 2^4}{2^7 \cdot 2^5}$

f) $\left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{3}{5}\right)^4$

Resuelva los siguientes ejercicios:

a) 5^{-3} b) $(-2)^{-2}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

Resuelva los siguientes ejercicios:

$$\frac{1}{4^2};\ \frac{1}{(-3)^2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3^3}$$

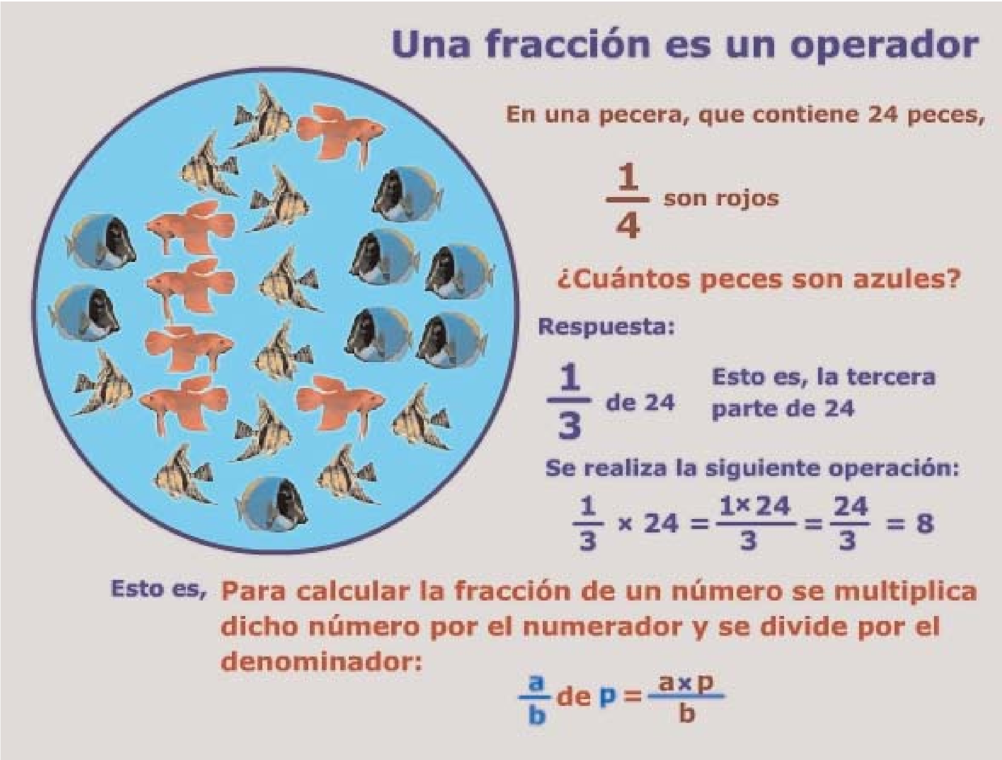
Resolución de problemas de fracciones

OPERACIONES CON FRACCIONES

Como ya se vio en el tema de tipos de números, una fracción se puede entender como un OPERADOR.

Para calcular la fracción de un número se *multiplica el dicho número por el numerador y se divide por el denominador:*

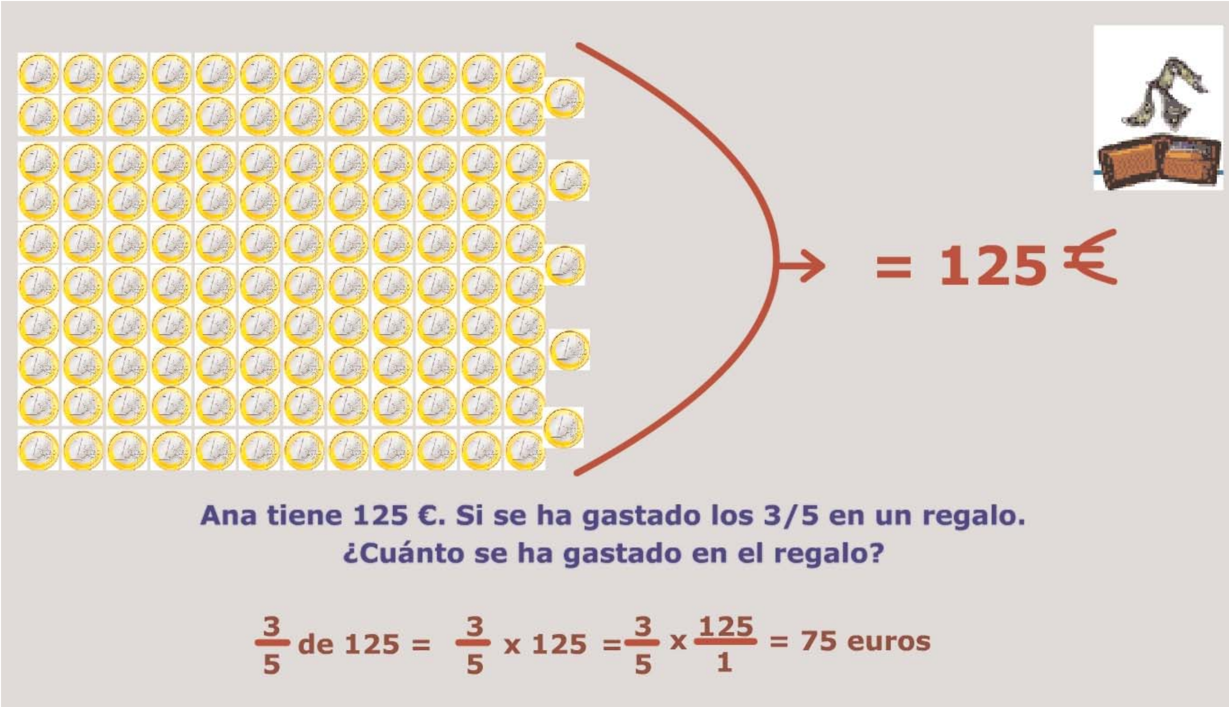
$$\frac{a}{b} \text{ de } p = \frac{a * p}{b}$$



Apliquémoslo mediante varios ejemplos:

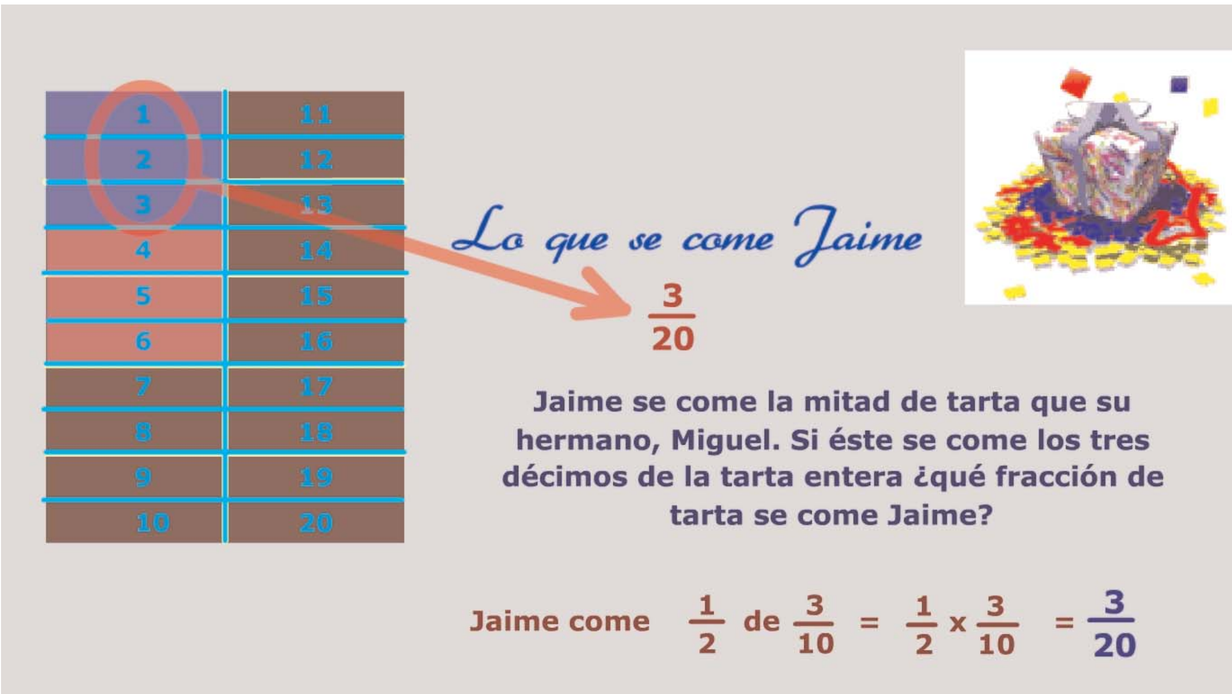
1. Fracción de un número.
   Problema directo:

   Ana tiene 125 €, si se ha gastado los 3/5 en un regalo. ¿Cuánto se ha gastado en el regalo?



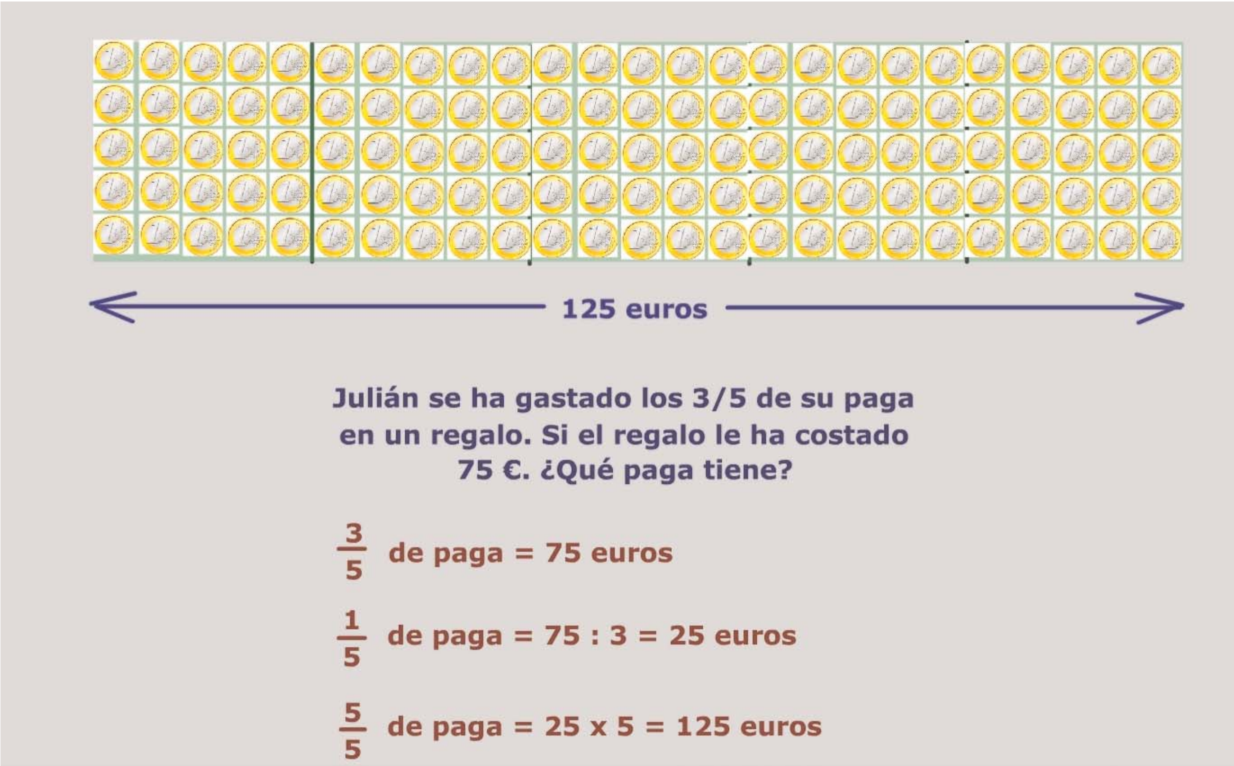
2. Fracción de fracción:

   Jaime se come la mitad de tarta que su hermano, Miguel. Si éste se come los tres décimos de la tarta entera ¿qué fracción de tarta se come Jaime?



3. Fracción de un número.
   Problema inverso:

   Julián se ha gastado los 3/5 de su paga en un regalo. Si el regalo le ha costado 75 € ¿Qué paga tiene?



4. Distintas partes de un todo:

Ejemplo1

Raquel tiene de sueldo 1500 € al mes. Emplea $\frac{1}{5}$ de dicho sueldo en comida, $\frac{2}{3}$ en gastos varios, y el resto lo ahorra.

Queremos saber:

a) ¿Qué fracción de dinero gasta?

   Basta sumar: $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{13}{15}$. Gasta los $\frac{13}{15}$ de su sueldo.

b) ¿Qué fracción de dinero ahorra?

   Si gasta los $\frac{13}{15}$ de su sueldo, ahorra los $\frac{2}{15}$

c) ¿Cuánto dinero gasta en comida y en varios?

   En comida gasta: $\frac{1}{5}\cdot 1500=300$ euros

   En varios gasta: $\frac{2}{3}\cdot 1500=1000$ euros

d) ¿Cuánto dinero ahorra?

   Ahorra: $\frac{2}{15}\cdot 1500=200$ euros

Ejemplo 2

En un depósito hay al principio del día 900 m^3 de agua. Por la mañana se gastan los $\frac{2}{5}$ de su capacidad y por la tarde $\frac{1}{3}$ de lo que queda.

Se quiere saber:

a) ¿Qué fracción del depósito queda al final de la mañana?

Quedan $\frac{3}{5}$ al final de la mañana.

b) ¿Qué fracción del depósito se gasta por la tarde?

Se gastan los $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{1}{5}$ de depósito

c) ¿Qué fracción del depósito queda en el depósito?

Se ha gastado $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ en total.

Quedan $\frac{2}{5}$ del depósito al final del día.

d) ¿Cuántos litro se gastan por la mañana? ¿Y por la tarde? ¿Cuántos litros sobran?

Por la mañana: $\frac{2}{5} \cdot 900 = 360\ m^3$ se gastan.

Por la tarde: $\frac{1}{5} \cdot 900 = 180\ m^3$ se gastan.

Al final del día: $\frac{2}{5} \cdot 900 = 360\ m^3$ quedan.

Actividades

1. En una población de 3.600 habitantes, 3/5 partes son mujeres, y de los hombres que hay los dos tercios son menores de 20 años.

Calcule:

a) ¿Qué fracción de la población son hombres?

b) ¿Qué fracción de la población son hombres menores de 20 años?

c) ¿cuantos hombres y mujeres hay en ese pueblo?

d) ¿cuántos de los hombres son menores de 20 años?

2. Me he gastado en un regalo la tercera parte del dinero que llevaba, 2/5 en unos zapatos, y aún me sobran 16 E.

a) ¿Qué fracción del dinero me he gastado?

b) ¿Qué fracción del dinero me queda?

c) ¿Con cuanto dinero he salido de casa?

Ejercicios

1. Simplifica todo lo que se pueda las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{45}{60}$

b) $\dfrac{-32}{20}$

c) $\dfrac{120}{300}$

d) $\dfrac{396}{756}$

2. De los siguientes pares de fracciones di cuáles son equivalentes y cuáles no:

a) $\dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{14}{30}$

b) $\dfrac{13}{17}$ y $\dfrac{52}{68}$

3. Opera y simplifica

a) $\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{4}{15}$

b) $\dfrac{12}{5}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{5}$

c) $\dfrac{6}{5}:\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{7}\right)$

4. Opera y simplifica

a) $\dfrac{3-\dfrac{2}{3}}{1+\dfrac{1}{6}}$

b) $\dfrac{1-\dfrac{2}{5}}{3}$

c) $\dfrac{\dfrac{2}{7}}{1-\dfrac{3}{7}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{3}}$

5. Opera y simplifica

a) $\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(1-\dfrac{5}{6}\right)$

b) $\left(2+\dfrac{4}{26}\right)-\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{91}\right)$

c) $\dfrac{4}{11}-\left[2-\left(\dfrac{3}{22}+\dfrac{1}{2}\right)\right]$

d) $2-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{4}\cdot\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5}\right)$

e) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{7}{2}-\dfrac{2}{5}:\dfrac{10}{3}$

f) $1:\dfrac{1}{4}-2+\dfrac{2}{5}:\dfrac{3}{10}$

g) $\dfrac{3}{4}:\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\right)+\dfrac{8}{7}$

h) $\dfrac{4}{7}-\dfrac{5}{2}:\dfrac{14}{3}-5\cdot\dfrac{4}{6}$

i) $\dfrac{12}{13}\cdot\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{7}\right)-\dfrac{2}{5}:\left(1+\dfrac{2}{5}\right)$

j) $6\cdot\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}\right):\dfrac{2}{7}$

6. En un depósito, el lunes había 3000 litros de agua y estaba lleno. El martes gastó 1/6 del depósito. ¿Qué fracción de agua queda? ¿Cuántos litros de agua quedan?

7. Un agricultor riega por la mañana 2/5 de un campo. Por la tarde riega el resto que son 6000 m2. ¿Cuál es la superficie del campo?

8. **Calcula cuánto vale A en las siguientes expresiones:**
   a) Dos tercios de A son 126
   b) A son los dos quintos de 3.000
   c) A son los cuatro sextos de 720
   d) Tres séptimos de A son 2.313

9. **Un padre le da a sus hijos: al mayor 1/3 del dinero que lleva, al 2º le da 1/5, al 3º le da 1/6 y al 4º le da los 18 euros que le quedan. ¿Cuánto dinero llevaba el padre?. ¿Cuánto le da a cada hijo?**

10. **De un rollo de alambre de 540 cm.,se corta en primer lugar la tercera parte, después se corta 1/3 de lo que queda y por último otro tercio del resto. ¿Cuánto se corta cada vez? ¿cuánto queda sin cortar?**

11. **Un rollo de cable de antena mide 250 metros. Se emplean 2/5 partes de la mitad del rollo para hacer una instalación. ¿Cuántos metros se utilizan? ¿Cuántos metros quedan sin utilizar? Expresa con una fracción los metros de cable que sobran.**

12. **Pablo se ha gastado 3/8 de sus ahorros en un viaje a Disneyland París. Si el viaje le ha salido por 900 euros. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?**

13. **El resultado de un examen ha sido: 1/10 de alumnos han tenido sobresaliente, 1/5 notable, 1/6 bien y 1/3 suficiente. ¿Qué fracción de los alumnos ha suspendido el examen?. Si el examen lo han suspendido 12 alumnos, averigua qué número de alumnos ha hecho el examen.**

PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

En esta sección vamos a trabajar los conceptos de proporcionalidad y porcentajes y los distintos tipos de problemas que se pueden resolver con ellos. Ambos conceptos son de gran utilidad para resolver multitud de problemas que aparecen de forma natural en cualquiera de las áreas que se trabajan en los distintos ciclos de formación profesional y también en nuestra vida cotidiana. Aunque son de apariencia sencilla, es muy importante que los distintos tipos de problemas se sepan resolver con una cierta soltura, ya que se utilizarán mucho posteriormente.

Razón y proporción. Cálculo del término desconocido

RAZÓN: Una razón es el cociente indicado de dos números

Ejemplo 1

La razón de los números 3 y 4 es $\frac{3}{4}$

Ejemplo 2

Los números 35 y 70 están en la razón 1 a 2 ya que

$$\frac{35}{70} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3

Ana mide 150 cm y su primo Pedro 50 cm., luego sus alturas están en razón 3 a 1, pues:

$$\frac{\text{altura de Ana}}{\text{altura de Pedro}} = \frac{150}{50} = \frac{3}{1}$$

PROPORCIÓN: Una proporción es la igualdad de dos razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y se lee "a es a b como c es a d. A los términos "b" y "d" se les llama medios y a los términos "a" y "c" extremos.

Ejemplo 1

$$\frac{30}{15} = \frac{2}{1} \text{ forman proporción, pues } 30 \cdot 1 = 15 \cdot 2$$

Ejemplo 2

$$\frac{52}{20} \neq \frac{6}{3} \text{ no forman proporción, pues } 52 \cdot 3 \neq 20 \cdot 6$$

CÁLCULO DEL TÉRMINO DESCONOCIDO DE UNA PROPORCIÓN

Para calcular el término desconocido de una proporción se aplica la propiedad de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \blacklozenge \; a \cdot d = b \cdot c$$

Producto de medios = producto de extremos

Ejemplo 1

$$\frac{6}{4} = \frac{x}{2}$$

se desconoce un medio

$$\frac{6}{4} = \frac{x}{2} => 6 \cdot 2 = 4 \cdot x =>$$

$$x = \frac{6 \cdot 2}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Ejemplo 2

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{x}$$

se desconoce un extremo

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{x} => 6 \cdot x = 4 \cdot 3 =>$$

$$x = \frac{4 \cdot 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Proporcionalidad directa

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando:

- Al aumentar la una (doble, triple...) la otra aumenta de igual manera (doble, triple...)
- Al disminuir la una (doble, triple,..), la otra disminuye de igual manera (doble, triple...)

Ejemplo 1

Los kilos de naranjas que compro y el dinero que pago por ellas son magnitudes directamente proporcionales

1 kilo .... 1,5 euros

2 kilos.............. 3 euros

3 kilos............ 4,5 euros

4 kilos............... 6 euros

5 kilos............ 7,5 euros

6 kilos............... 9 euros

Ejemplo 2

El número de caramelos de una bolsa y su peso son magnitudes directamente proporcionales:

Nº Caramelos	1	2	3	4	5	6	7
Peso en g	25	50	75	100	125	150	175

OBSERVACIÓN:

En una tabla de valores directamente proporcionales, el cociente de dos valores que se corresponden es siempre constante. Es decir dos pares de valores correspondientes forman una proporción.

En el ejemplo 1

$$\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{5}{7,5} = \frac{5}{9} = \ldots$$

En el ejemplo 2

$$\frac{1}{25} = \frac{2}{50} = \frac{3}{75} = \frac{4}{100} = \frac{5}{125} = \frac{6}{150} = \ldots$$

Problemas

Resolución de problemas de proporcionalidad. Métodos

Ante un problema, hay que asegurarse primero de que se trata de magnitudes proporcionales y entonces se procede:

1º Escribir los datos de las dos magnitudes
2º Comprobar si se trata de una proporcionalidad directa o inversa
3º Según el tipo de proporcionalidad, se realizan los siguientes pasos:

Problemas de proporcionalidad directa

Existen dos métodos:

METODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

- Se ordenan los datos y la incógnita, diferenciando las magnitudes.
- Se calcula el valor, asociado, de una magnitud a la unidad de la otra.
- Conocido este valor, podremos calcular fácilmente cualquier par de valores correspondientes.

METODO DE LA REGLA DE TRES

Problemas de proporcionalidad directa

método de la regla de tres

1º Se ordenan los datos y la incógnita, diferenciando las magnitudes
2º Se dividen ordenadamente los valores pertenecientes a una misma magnitud.
3º Se construye la proporción igualando los cocientes.
4º Se calcula el valor buscado aplicando la propiedad de la proporción

Ejemplo

Si cuatro cajas de bombones pesan un kilo ¿cuánto pesarán seis cajas?

1º Ordenación de datos

$$\left.\begin{array}{ll} \text{4 cajas pesan} & \text{1 kg} \\ \text{6 cajas pesarán} & x \end{array}\right\}$$

2º Proporción con los cocientes

$$\frac{4}{6} = \frac{1}{x} \Rightarrow 4 \cdot x = 6 \cdot 1$$

3º Cálculo del valor desconocido

$$x = \frac{6}{4} = 1{,}500 \text{ kg}$$

EJEMPLO: Si cuatro cajas de bombones pesan un kilo ¿cuánto pesarán seis cajas?, ¿y diez?

1º Valor asociado a la unidad (1 caja)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{4 cajas pesan .... 1 kg} \\ \text{1 caja pesará .... u kg} \end{array}\right\} u = \frac{1}{4} = 0{,}250\text{kg}$$

2º Cálculo del peso de 6 cajas:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{1 caja pesa .... 0,250 kg} \\ \text{6 cajas pesarán .... x kg} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 \text{ cajas} \cdot 0{,}250 \text{ kg} = 1{,}5 \text{ kg} \\ (\text{nº cajas - valor de la unidad}) \end{array}$$

3º Cálculo del peso de 10 cajas:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{1 caja pesa .... 0,250 kg} \\ \text{10 cajas pesarán ..... y kg} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 10 \text{ cajas} \cdot 0{,}250 \text{ kg} = 2{,}5 \text{ kg} \\ (\text{nº cajas - valor de la unidad}) \end{array}$$

Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando:

- Al aumentar la una (doble, triple...), la otra disminuye de igual manera (doble, triple...)
- Al disminuir la una (doble, triple...), la otra aumenta de igual manera (doble, triple...)

Ejemplo 1

El tiempo que se tarda en ir de una ciudad a otra y la velocidad
con la que se circula son magnitudes inversamente proporcionales

12 horas .... 5 km/h

6 horas ....10 km/h

3 horas .... 20 km/h

1,5 horas ....40 km/h

1 hora ....60 km/h

Ejemplo 2

El caudal de un grifo en litros por minuto y el tiempo que tarda en llenar un depósito
son magnitudes inversamente proporcionales

Caudal (l/min)	1	2	3	4	5	6
Tiempo (min)	600	300	200	150	120	100

OBSERVACIÓN: En una tabla de valores inversamente proporcionales, el producto de dos valores que se corresponden es siempre constante.

En el ejemplo 1

$$12 \cdot 5 = 6 \cdot 10 = 3 \cdot 20 = 1{,}5 \cdot 40 = 1 \cdot 60 = \ldots$$

En el ejemplo 2

$$1 \cdot 600 = 2 \cdot 300 = 3 \cdot 200 = 4 \cdot 150 = 5 \cdot 120 = 6 \cdot 100 = \ldots$$

NOTA: No todas las magnitudes se pueden relacionar de forma directa ó inversamente proporcional.

- La edad de un chico y su altura no son magnitudes ni directa ni inversamente proporcionales.
- La talla de un pantalón y su precio no son magnitudes ni directa ni inversamente proporcionales.

Actividades

En las siguientes expresiones decir, si la hay, la relación de proporcionalidad entre los pares de magnitudes.

a) El peso de peras compradas y los euros pagados por ellas.

b) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un depósito.

c) La edad de un niño y su altura.

d) El precio de la botella de naranjada y el número de botellas que podré comprar con 20 euros .

Problemas

Resolución de problemas de proporcionalidad. Métodos

Ante un problema, hay que asegurarse primero de que se trata de magnitudes proporcionales y entonces se procede:

1º Escribir los datos de las dos magnitudes
2º Comprobar si se trata de una proporcionalidad directa o inversa
3º Según el tipo de proporcionalidad, se realizan los siguientes pasos:

Problemas de proporcionalidad directa

Existen dos métodos:

METODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

1º Se ordenan los datos y la incógnita, diferenciando las magnitudes

2º Se calcula el valor, asociado, de una magnitud a la unidad de la otra.

3º Conocido este valor, podremos calcular fácilmente cualquier par de valores correspondientes.

METODO DE LA REGLA DE TRES

Como en una proporción inversa el producto de dos valores correspondientes es siempre constante, se procede:

1º Se ordenan los datos y la incógnita, diferenciando las magnitudes

2º Se multiplican ordenadamente los valores correspondientes.

3º Se calcula el valor buscado igualando los dos productos.

Ejemplo:

1º Se ordenan los datos y la incógnita, diferenciando las magnitudes

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ trabajadores tardan .... } 10 \text{ días} \\ 1 \text{ trabajador tardará .... } u \text{ días} \end{array}\right\} u = 4 \cdot 10 = 40 \text{ días}$$

2º Se multiplican ordenadamente los valores correspondientes.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ trabajador tarda .... } 40 \text{ días} \\ 8 \text{ trabajadores tardarán ..... } x \text{ días} \end{array}\right\} x = \frac{40}{8} = 5 \text{ días} \left(\frac{\text{valor de la unidad}}{\text{nº de trabajadores}}\right)$$

3º Se calcula el valor buscado igualando los dos productos.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ trabajador tarda .... } 40 \text{ días} \\ 2 \text{ trabajadores tardarán ..... } y \text{ días} \end{array}\right\} x = \frac{40}{2} = 20 \text{ días} \left(\frac{\text{valor de la unidad}}{\text{nº de trabajadores}}\right)$$

Ejemplo:

Si cuatro trabajadores tardan diez días en hacer una obra, ¿cuánto tardarán si son ocho trabajadores?, ¿y dos?

1º Valor asociado a la unidad (1 trabajador)

$$\left\{\begin{array}{l} 4 \text{ trabajadores tardan .... } 10 \text{ días} \\ 8 \text{ trabajadores tardarán .... } x \text{ días} \end{array}\right\}$$

2º Cálculo del tiempo que emplean 8 trabajadores:

$$4 \cdot 10 = 8 \cdot x \Longrightarrow 40 = 8 \cdot x$$

3º Cálculo del tiempo que emplean 2 trabajadores:

$$x = \frac{40}{8} = 5 \text{ días}$$

Ejemplo:

Si cuatro trabajadores tardan diez días en hacer una obra, ¿cuánto tardarán si son ocho trabajadores?, ¿y dos?

1º Ordenación de los datos

$$\left[\begin{array}{l} 4 \text{ trabajadores tardan .... } 10 \text{ días} \\ 2 \text{ trabajadores tardarán .... } z \text{ días} \end{array}\right]$$

2º Multiplicación de los valores correspondientes

$$4 \cdot 10 = 2 \cdot z \Longrightarrow 40 = 2 \cdot z$$

3º Calculo del valor buscado

$$z = \frac{40}{2} = 20 \text{ días}$$

Actividades

1. Un grifo que arroja un caudal de 6 litros por minuto, llena un depósito en 30 minutos. ¿Cuánto tardará en llenar ese mismo depósito otro grifo cuyo caudal es de 10 litros por minuto?

2. Una tienda rebaja todos los artículos en la misma proporción. Si por una camiseta de 15 euros pago 13 euros, ¿Cuánto debo pagar por un pantalón de 60 euros?

3. Un ciclista que durante 10 minutos da 35 vueltas en un circuito. ¿Cuántas vueltas dará si corre durante 28 minutos? ¿Cuánto tiempo deberá permanecer para dar 70 vueltas?

4. De 6000 kg. de uva se han obtenido 4350 litros de uva. ¿Qué cantidad de uva será necesaria para conseguir 5800 litros de mosto?

5. Un camión tarda 6 horas en cubrir el trayecto entre dos poblaciones, a una velocidad media de 80 km./h. ¿Cuánto habría tardado a una velocidad media de 100 km./h?

Repartos de proporcionalidad directa

Una de las aplicaciones más habituales de la proporcionalidad son los repartos de proporcionalidad directa.

Ejemplo 1

Tres socios invierten 5000 €, 4000 € y 3000 € respectivamente en una empresa. Si los beneficios al cabo de un año son 6000 €. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Tres socios invierten 5000 €, 4000 € y 3000 € respectivamente en una empresa. Si los beneficios al cabo de un año son 6000 €. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Se trata de un problema de proporcionalidad directa. Hay que darse cuenta de que al total del dinero invertido: 5000+4000 +3000=12000 € le corresponde el total de beneficios (6000 €)

Por lo tanto, para resolverlo basta utilizar cualquiera de los métodos de la proporcionalidad directa:

Regla de tres

Para los 3.000 €

1º Ordenación de datos

$$\left.\begin{array}{lll} 12000\text{ € inversión} & 6000\text{ €} & \text{beneficio.} \\ 3000\text{ € inversión} & x\text{ €} & \text{beneficio} \end{array}\right\}$$

2º Proporción con los cocientes: $\frac{12000}{3000} = \frac{6000}{x} \Rightarrow 12000 \cdot x = 18000000$

3º Cálculo del valor desconocido: $x = \frac{18000000}{12000} = 1500\text{ €}$

Para los 4.000 €

1º $\left.\begin{array}{lll} 12000\text{ € inv.} & 6000\text{ €} & \text{benef.} \\ 4000\text{ € inv.} & x\text{ €} & \text{benef} \end{array}\right\}$

2º $\frac{12000}{4000} = \frac{6000}{x} \Rightarrow 12000 \cdot x = 24000000$

3º $x = \frac{24000000}{12000} = 2000\text{ €}$

Para los 5.000 €

$$\left.\begin{array}{ll} 12000\text{ €} & 6000\text{ €} \\ 5000\text{ €} & x\text{ €} \end{array}\right\}$$

$$\frac{12000}{5000} = \frac{6000}{x} \Rightarrow 12000 \cdot x = 30000000$$

$$x = \frac{30000000}{12000} = 2500\text{ €}$$

Ejemplo 2

Por el arreglo de un parque se han pagado 9000 €. a dos cuadrillas de jardineros .Si la primera cuadrilla tenía reflejadas 80 jornadas de trabajo y la segunda 120 . ¿Cuánto tiene que cobrar cada cuadrilla?

Se trata de un problema de proporcionalidad directa. Hay que darse cuenta que al total a cobrar (9000 €) le corresponde el total de jornadas trabajadas: 80 + 120 = 200 jornadas.

Por lo tanto, para resolverlo basta utilizar cualquiera de los métodos de la proporcionalidad directa como por ejemplo Reducción a la unidad

Resolución:

1º Valor asociado a la unidad (1 jornada)

$$\left\{\begin{array}{l} 200 \text{ jornadas valen} \ldots\ldots\ldots\ 9000 \text{ euros} \\ 1 \text{ jornada valdrá} \ldots\ldots\ldots\ldots\ u \text{ euros} \end{array}\right\}$$

$$u = \frac{9000}{200} = 45 \text{ euros}$$

2º Cálculo del cobro de 80 jornadas:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ jornada vale} \ldots\ldots\ldots\ldots\ 45 \text{ euros} \\ 80 \text{ jornadas valdrán} \ldots\ldots\ x \text{ euros} \end{array}\right\} x = 80 \cdot 45 = 3.600 \text{ euros}$$

3º Cálculo del cobro de 120 jornadas:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ jornada vale} \ldots\ldots\ldots\ldots\ 45 \text{ euros} \\ 120 \text{ jornadas valdrán} \ldots\ldots\ y \text{ euros} \end{array}\right\} y = 120 \cdot 45 = 5.400 \text{ euros}$$

Actividades

1. Cuatro amigos han recibido por pintar una tapia 150 E. Los metros cuadrados que han pintado son 12, 10, 15 y 13 respectivamente. ¿Cuánto tiene que cobrar cada uno?

2. Ana, Jaime y Javier van a comprar un regalo para un amigo. Se han gastado 90 E. Ana lleva el dinero de 5 de ellos, Jaime el de 7 y Javier el de 6. ¿Cuánto dinero lleva Ana? ¿Y Jaime? ¿Y Javier?

Porcentaje

El tanto por ciento es la cantidad variable que se asigna por cada 100 unidades y se expresa con el símbolo %.

Por ejemplo si escribimos “20%” queremos indicar que a cada 100 unidades le asignamos 20.

Es una de las expresiones que más se utilizan tanto en el lenguaje cotidiano, periodístico, como comercial, etc. Es habitual oír frases como: “Rebajas de un 20 %” o “La reserva de agua de este pantano está al 40%”

DISTINTAS FORMAS DE VER LOS PORCENTAJES

Como una proporción:

El tanto por ciento equivale a una proporción directa en la que al valor 100 le corresponde el tanto.

Ejemplo:

Calculamos el 20% de 320 por la regla de tres:

1º Ordenación de datos

$$\begin{Bmatrix} \text{A 100 le corresponden .... 20} \\ \text{A 320 le corresponden .... x} \end{Bmatrix}$$

2º Proporción con los cocientes

$$\frac{120}{320} = \frac{20}{x} => 100 \cdot x = 320 \cdot 20$$

3º Cálculo del valor desconocido

$$x = \frac{6400}{100} = 64$$

Como una fracción:

El porcentaje como fracción

"*tanto por ciento* significa que *de cada 100 tomamos tanto*"

↓

Calcular a % de C

es calcular la *fracción*

$$\frac{a}{100} \text{ de C} = \frac{a \cdot C}{100}$$

Ejemplo:

Calcular el 40% de 600

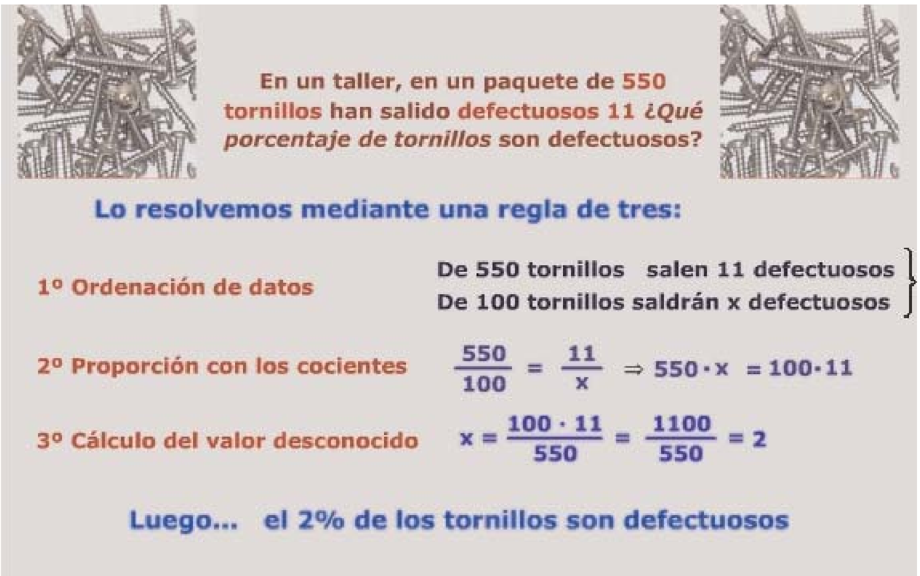
$$\frac{40}{100} \text{ de } 600 = \frac{40 \cdot 600}{100} = \frac{24000}{100} = 240$$

Problemas

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PORCENTAJES

Además de los cálculos directos de porcentajes de una determinada cantidad, resueltos anteriormente, pueden aparecer también los siguientes tipos:

Cálculo del % :



Cálculo del total:

Ejemplo:

Se sabe que el 2% de los tornillos de una caja salen defectuosos. Si han salido defectuosos 15 tornillos. ¿Cuántos tornillos tenía la caja?

1º Ordenación de datos

$$\left.\begin{array}{l} \text{2 tornillos defectuosos en 100 tornillos} \\ \text{15 tornillos defectuosos en x tornillos} \end{array}\right\}$$

2º Proporción con los cocientes

$$\frac{2}{15} = \frac{100}{x} => 2 \cdot x = 100 \cdot 15$$

3º Cálculo del valor desconocido

$$x = \frac{1500}{2} = 750$$

Disminución porcentual:

Ejemplo:

Un ordenador portátil, que costaba 1350 €, está rebajado un 12%. ¿Cuánto nos costará?

Hay dos formas distintas de resolverlo:

Forma directa:

Basta con darse cuenta que si nos rebajan el 12%, pagaremos el 88% de su precio. Es decir hay que calcular el 88% de 1350.

88% de 1350 = 0,88 · 1350 = 1188 €.
Pagamos 1180 €.

Regla de tres

1º Ordenación de datos

$$\left.\begin{array}{l}100 \text{ euros sin rebajas .... son } 88 \text{ euros con rebajas}\\ 1350 \text{ euros sin rebajas .... son x euros con rebajas}\end{array}\right\}$$

2º Proporción con los cocientes

$$\frac{100}{1350} = \frac{88}{x} \Rightarrow 100 \cdot x = 1350 \cdot 88$$

3º Cálculo del valor desconocido

$$x = \frac{1350 \cdot 88}{100} = 1188 \text{ euros}$$

Aumento porcentual:

Ejemplo:

Una moto que el año pasado nos costaba 5000 €, ha subido su precio en un 15 %. ¿Cuánto nos cuesta ahora?

Hay dos formas distintas de resolverlo:

Forma directa:

Basta con darse cuenta que si nos aumentan el 15%, pagaremos el 115% de su precio. Es decir hay que calcular el 115% de 5000.

115% de 5000 = 1,15 · 5000 = 5750 €.
Pagamos 5.750 €.

Regla de tres

1º Ordenación de datos

$$\left.\begin{array}{l}100 \text{ euros el año pasado .... } 115 \text{ euros este año}\\ 5000 \text{ euros el año pasado .... x euros este año}\end{array}\right\}$$

2º Proporción con los cocientes

$$\frac{100}{5000} = \frac{115}{x} \Rightarrow 100 \cdot x = 115 \cdot 5000$$

3º Cálculo del valor desconocido

$$x = \frac{115 \cdot 5000}{100} = 5750 \text{ euros}$$

Actividades

1. En un colegio hay 575 alumnos matriculados de los que el 8% son inmigrantes. ¿Cuántos alumnos inmigrantes hay?

2. Isabel ha comprado un cd que costaba 18 euros, pero le han hecho una rebaja del 15 %. ¿Cuánto ha pagado?

3. Roberto ha pagado 35,2 euros por unos pantalones que estaban rebajados un 12%. ¿Cuánto costaban los pantalones sin rebajar?

4. Lucía ha pagado 30,6 € por una camisa que costaba 36 euros. ¿Qué tanto por ciento le han rebajado?

Ejercicios

1. Diga si hay, en las siguientes expresiones, relación de proporcionalidad entre los pares de magnitudes.

1. La talla de una falda y su precio
2. El número de bolsas de caramelos y peso que tienen
3. La velocidad de un ciclista y el tiempo que tarda en recorrer el circuito

2. Resolución de problemas de proporcionalidad

4. Dos poblaciones que distan 10 km. están, en un mapa, a una distancia de 4 cm. ¿Cuál será la distancia real entre dos ciudades que, en ese mismo mapa, están separadas 21 cm.? ¿Cuál es la escala del mapa?
5. Se planifica una excursión sobre un plano a escala 1:600.000. ¿Cuántos kilómetros recorremos si en el plano la distancia es de 9 cm.? ¿Cuánto tardaremos caminando a una media de 4 km./hora?
6. Un jefe gratifica con unas vacaciones a sus empleados que no faltaron nunca al trabajo. A los demás les gratifica con cantidades de dinero inversamente proporcionales al número de días que faltaron. Si Javier, que faltó 21 veces le han correspondido 100€. ¿Cuánto le corresponderá a Miguel que faltó sólo tres días?

3. Repartos proporcionales

7. Tres amigos, Raquel, Marivi y Julián, han recibido 500 euros por cuidar varios días a un niño.. Raquel ha estado cuatro días, Marivi seis y Julián diez días. ¿Cuánto dinero corresponde a cada uno?

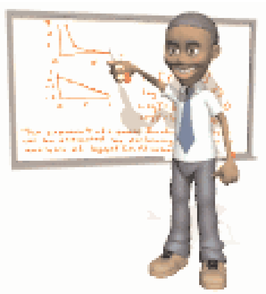
4. Porcentajes

8. Calcular el 12% de 844
9. Mi hijo recibía hasta ahora 5 euros semanales, pero le hemos subido la asignación a 6 euros. ¿Cuál ha sido el porcentaje aumentado?
10. Un ganadero tiene en su almacén 15000 kg. de trigo después de la cosecha. Si a los 5 meses ha gastado 10.200 kg. ¿Qué % de trigo ha gastado? ¿Qué % le queda?
11. Si un banco paga un interés de un 5% anual. ¿Qué dinero me dará al final del año, si al inicio tenía 4500 €?
12. El pantano de Ricoballo tiene una capacidad de 1200 Hm^3. Si ahora tiene 144 Hm^3. ¿Qué porcentaje de su capacidad ha gastado?

ECUACIONES Y ÁLGEBRA. GEOMETRÍA

4

INTRODUCCIÓN



En esta unidad vamos a trabajar las ecuaciones y el álgebra, en la primera parte, y la geometría, en la segunda parte.

El álgebra sustituye los números por letras. Esa sencilla idea impulsó tremendamente el desarrollo de las matemáticas en el pasado y actualmente nos permite resolver con más eficiencia infinidad de problemas de la vida cotidiana. Acostúmbrate a usarlas. Llama 'x' a lo desconocido. Hallar el valor de 'x' supondrá la resolución del problema.

La geometría nos introducirá a otros temas clásicos de las matemáticas: el Sistema Métrico Decimal y las áreas y volúmenes de las principales figuras geométricas. Aquí deberás prestar atención a utilizar siempre el mismo sistema de medidas antes de realizar las cuentas. No podemos operar con km y m. Es necesario pasarlo todos a km o a m previamente. Otro error muy común es dar el resultado en número, sin especificar la unidad de medida. Por ejemplo, el área del campo es 35. Debemos expresar la unidad, por ejemplo, 35 m^2. Es sencillo, pero son los errores más frecuentes en los problemas de áreas y volúmenes.

ECUACIONES Y ÁLGEBRA

En el álgebra los números se sustituyen por letras. De esa forma nos podemos centrar nuestra atención en las operaciones y construir enunciados que sirvan para todos los casos, no para uno en concreto. Por ejemplo, si compro tres unidades de un artículo, puedo expresar el costo como 3x donde 'x' depende del precio del artículo. Si el artículo vale 12 euros, el costo será 36 euros.

Lo más conocido del álgebra son el tema de "ecuaciones". Se trata de conocer e identificar sus elementos y sus clases o tipos. Además aprenderemos a resolverlas.

Es muy importante comprender que hay que seguir tres pasos:

1. Conocer los elementos de una ecuación
2. Identificar el tipo de ecuación con el que está trabajando
3. Aplicar el correspondiente método para solucionarla

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es *aquella en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones.* Surge cuando, en Matemáticas, se plantean situaciones o enunciados en los que aparecen *datos desconocidos o indeterminados que se representan por letras.*

EXPRESIONES ALGEBRAICAS. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Son expresiones algebraicas:

$$2x - 4 \qquad \frac{a\,(b+1)}{3} \qquad \frac{a+b}{a}$$

Donde...
Las letras representan números cualquiera o que de momento desconocemos
Las operaciones están claramente indicadas

Los **monomios** son expresiones algebraicas *formadas por productos de números y letras.*

Ejemplo: **3x**

Están formados por:

Coeficiente: es el número conocido que opera con una o varias letras
Parte literal: son las letras con las que se opera

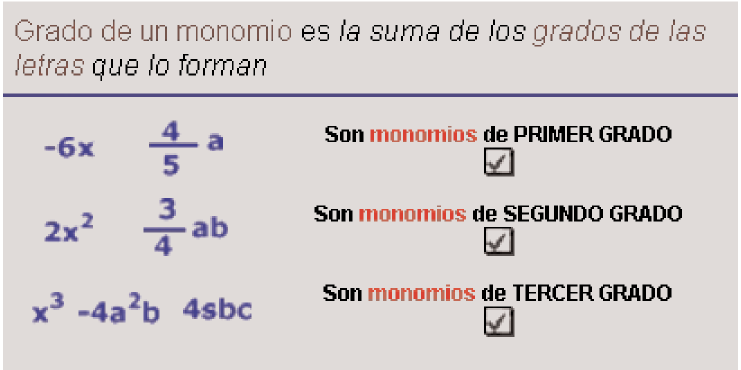
3 x

Parte literal

Coeficiente

El grado de una letra 'a' es el *exponente al que una letra está elevada.*
En este ejemplo es 2. $7a^2b$

El grado de una monomio es la suma de los *exponentes de cada una de sus letras.* En el ejemplo es 3 (2 de la 'a' y 1 de la 'b' -cuando las letras no tienen exponente, se entiende que el exponente es 1)



Práctica

Responda a las siguientes preguntas

En este monomio $3x^2y$

¿Cuál es el coeficiente?

¿Cuál es la parte literal?

¿Cuál es el grado de la letra x?

¿Cuál es el grado del monomio?

Una expresión algebraica toma un valor concreto cuando las letras se sustituyen por números conocidos.

Por ejemplo, el valor numérico de **3x2**, si x = 5 es...

$$3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 = 3 \cdot 25 - 10 = 75 - 10 = 65$$

Esto es, el valor de la expresión algebraica $3x^2 - 2x$ es 65

Por lo tanto:

El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se *obtiene* cuando se **sustituyen las letras por los números** que se indiquen y se **realizan las operaciones indicadas.**

Ecuaciones

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es *una igualdad* entre expresiones algebraicas que *se cumple solamente para algunos valores de las letras.*

$$4x - 3 = 2x + 1$$

Esta igualdad sólo es cierta si $x = 2$

Responda a esta pregunta:

$$3x + 7 = 10$$

Esta igualdad sólo es cierta si

x =

¿Qué elementos tiene una ecuación y cómo se llaman?

$\underbrace{4x - 3}_{\text{Miembro 1}} = \overbrace{2x - 1}^{\text{Miembro 2}}$	MIEMBROS: son las expresiones que aparecen a cada lado del signo =
TÉRMINOS: son los monomios de cada miembro	$4x - 3 = 2x - 1$ Término 4
$6x - 3 = 2y - 1$ Incógnita x	INCÓGNITAS: Son las letras que aparecen en la ecuación
GRADO DE LA ECUACIÓN: es el mayor exponente con que figura la incógnita (una vez realizadas todas las operaciones) x^2	$3x^2 + 8 = 2x - 3$ — Esta es una ecuación de segundo grado $8x - 3 + 2x = -9 - 2x$ — Esta es una ecuación de primer grado
SOLUCIONES: son los valores que deben tener las incógnitas para que la igualdad entre los miembros sea cierta.	En $4x - 3 = 2x + 1$ la solución es $x = 2$ En $3x^2 + 7 = 10$ la solución es $x = 1$ ó $x = -1$

Un ejemplo:

	Miembros	Términos	Grado	Incógnitas	Soluciones
$3x + 1 = 4$	3x 4	3x 1 4	1	x	x = 1

Práctica

Rellene las casillas

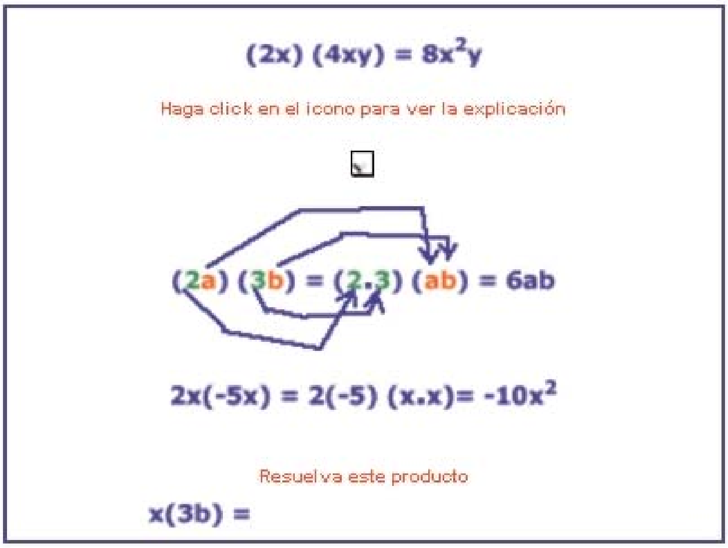
$4x - 3 = 2x + 1$ →	Miembros	
	Términos	
	Grado	
	Incógnitas	
	Soluciones $x =$	

Operaciones con monomios

La suma de monomios

- La suma de dos o más monomios sólo puede realizarse cuando ambos tienen la misma parte literal. En este caso se dice que son semejantes.
- En caso contrario la suma se deja indicada.
- Para sumar monomios con la misma parte literal se suman los coeficientes de dichos monomios.

Esta suma SI puede realizarse	$3x + 7x = 10x$ Tiene la misma parte literal
Esta suma NO puede realizarse y debe dejarse indicada	$2x^2 + 7x = 10x$ No tiene la misma parte literal
Ejemplo de realización de una suma: $4b^2 + 2b^2 - 5b^2 = (4+2+5)b^2 = 1b2 = b2$	
Realice esta suma y escriba el resultado: $8ab - 2ab - 4ab$	



El producto de monomios

El producto de dos o más monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales.

Práctica

Realice las siguientes operaciones

1	$(3a)(4a)$		1	$2x + x$	
2	$(-2x)(-4x)$		2	$7x - 4x$	
3	$4a \cdot 5a^2$		3	$6b - 9b$	
4	$(-3x^2)(4x)$		4	$2p + 7p - 5p$	
5	$2x^2(2x^2)$		5	$3ab + 2ab$	
6	$(2x^2y)\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)$		6	$5ab^2 - 6ab^2 + 2ab^2$	
			7	$2x + 3x + x^2 + x^2$	
			8	$x^2 - x + 4x^2 + 3x$	

Resolución de ecuaciones

¿Qué es resolver una ecuación?

Resolver una ecuación es *encontrar sus soluciones* o llegar a la conclusión de que no tiene.

En este capítulo vamos a aprender a resolver ecuaciones sencillas.

Vamos a plantear un primer ejemplo y después dos variantes del mismo: una para ecuaciones con paréntesis y otra para las que llevan denominadores.

Es fundamental *haber comprendido el primer ejemplo* antes de pasar a los siguientes.

¿Cómo se resuelve una ecuación de grado uno con una incógnita?

Ejemplo 1

$$4x + 5 - 3x - 2 = -6x - 4 + x - 11$$

Primer paso: Operamos en cada miembro agrupando términos semejantes	x -5x $4x + 5 - 3x - 2 = -6x - 4 + x - 11$ 3 -15 $x + 3 = -5x - 15$
Segundo paso: Pasamos los términos en x a un miembro y los términos independientes al otro miembro. *Regla práctica: al cambiar de miembro, el término cambia su signo.*	$x + 3 = -5x - 15$ $x + 5x$ $-3 - 15$ $x + 5x = -15 - 3$
Tercer paso: Operamos en cada miembro	$6x = -18$
Cuarto paso: Despejamos la incógnita pasando el múltiplo de la x a que divida el otro miembro.	$6x = -18$ $x = \frac{-18}{6}$ $x = \frac{-18}{6}$

Siguiendo los pasos señalados, resuelva esta ecuación:

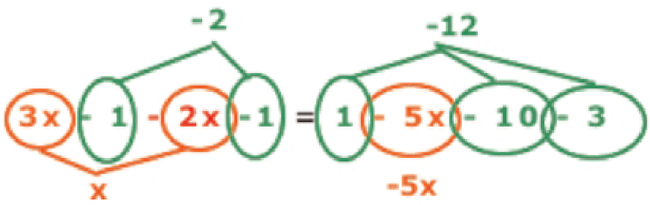
$$3x + 8 = 2x - 4$$

Ecuaciones con paréntesis

Comprendido el proceso de resolución de una ecuación, pasamos a estudiar como se resuelven las *ecuaciones de grado uno que llevan paréntesis*

Ejemplo

$$3x - 1 - (2x + 1) = 1 - 5(x + 2) - 3$$

Pimer paso: Quitar los paréntesis.	$3x - 1 - 2x - 1 = 1 - 5x - 10 - 3$
Segundo paso: Operamos en cada miembro agrupando términos semejantes.	 $x - 2 = -5x - 12$
Tercer paso: Pasamos los términos en x a un miembro y los términos independientes al otro miembro.	$x + 5x = -12 + 2$
Cuarto paso: Operamos en cada miembro	$6x = -10$
Quinto paso : Despejamos la incógnita pasando el coeficiente de la x dividiendo al otro miembro.	$x = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$

Siguiendo los pasos señalados, resuelva esta ecuación:

$$4x - 2(x - 1) + x = -20 + 2x + 4(2x - 1) - 2$$

Ecuaciones con denominadores

Comprendido el proceso de resolución de una ecuación, pasamos a estudiar como se resuelven las *ecuaciones de grado uno que llevan divisores*

Ejemplo

$$\frac{2x-3}{2}-\frac{x+3}{4}=-4-\frac{x-1}{2}$$

Pimer paso: Reducir a común denominador (se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores).	$\frac{2(2x-3)}{4}-\frac{1(x+3)}{4}=-\frac{4.4}{4}-\frac{2(x-1)}{4}$
Segundo paso: Operamos en cada miembro.	$\frac{2(2x-3)-1(x+3)}{4}=\frac{-4.4-2(x-1)}{4}$
Tercer paso: Igualamos numeradores	$2(2x-3)-1(x+3)=-16-2(x-1)$
Cuarto paso: Resolvemos la ecuación como en los ejemplos anteriores	$2(2x-3)-1(x+3)=-16-2(x-1)$ $4x-6-x-3=-16-2x+2$ $3x \quad -9 \qquad -14 \quad -2x$ $3x-9=-14-2x$ $3x+2x=-14+9$ $5x=-5$

Siguiendo los pasos señalados, resuelva esta ecuación:

$$\frac{x+3}{3}-\frac{6+2x}{4}=\frac{2-2x}{2}+\frac{2x-5}{1}$$

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones:

$6 = 8 + 9x$

$6x - 2x - 1 = 3x + 5$

$8 + 4x - 10 = 6x + 5$

$3(x - 7) + 1 = 7x - 13 - 7$

$3(x - 3) = 2x - 6$

$2(1 - 2x) = 8x + 6$

$$\frac{x - 1}{2} - \frac{3x - 10}{5} - \frac{x - 2}{3} = 0$$

$$\frac{x + 3}{4} - x - \frac{1 - x}{3} = \frac{x - 2}{5} - \frac{5}{12}$$

$$\frac{x + 1}{6} - \frac{x - 4}{3} = 2 + \frac{1}{4}$$

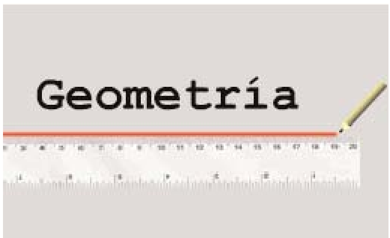
GEOMETRÍA

La geometría es el *"estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio"*, según el Diccionario de la Real Academia.

En esta sección vamos a estudiar el Sistema Métrico Decimal (magnitudes de longitud, superficie y volumen) y las áreas y volúmenes de las principales figuras geométricas.

Sistemas de medidas

¿Qué es medir?



Medir una magnitud o el tamaño de un elemento de la realidad es comparar cierta cantidad de esa magnitud con otra cantidad que se ha elegido como unidad patrón o de medida.

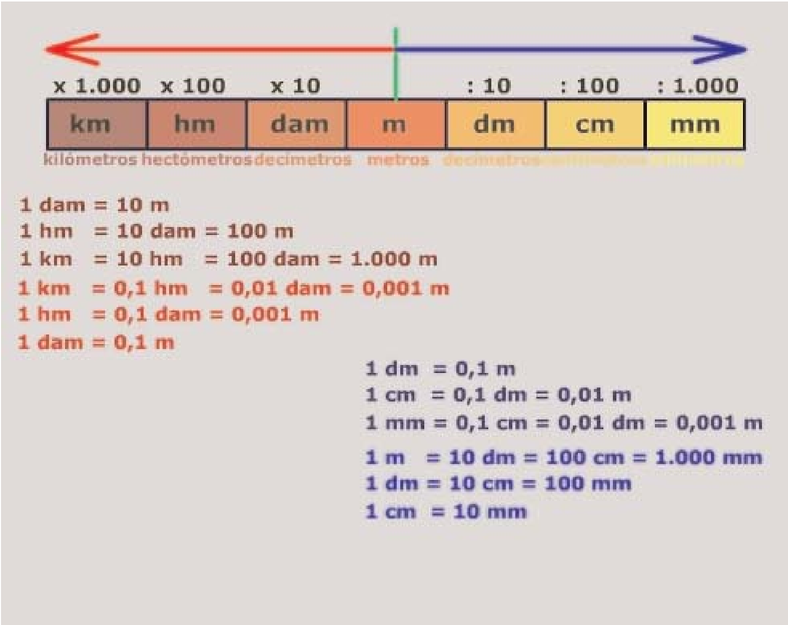
El sistema que utilizaremos es el **Sistema Métrico Decimal**

Las magnitudes que vamos a utilizar y calcular van a ser:

- Longitud
- Superficie
- Volumen

Ee Sistema Métrico Decimal

El Sistema Métrico Decimal parte de una unidad básica de medida: el metro, y luego obtiene otras unidades en función de *multiplicar o dividir 77por la potencia de diez* correspondiente esa unidad básica.



Las unidades de medida son:

m	metro
dam	decámetro
hm	hectómetro
km	kilómetro
dm	decímetro
cm	centímetro
mm	milímetro

Para medir la longitud se utiliza el metro lineal (m). Cada salto de unidad de multiplica o divide por 10.	1 km = 10 hm = 100 dam = 1.000 m 1 m = 10 dm = 100 cm = 1.000 mm
Para medir la superficie se utiliza el metro lineal (m^2). Cada salto de unidad de multiplica o divide por 100.	1 m = 0,1 dam = 0,01 hm = 0,001 km 1 mm = 0,1 cm = 0,01 dm = 0,001 m 1 km^2 = 100 hm^2 = 10.000 dam^2 = 1.000.000. m^2 1 m^2 = 100 dm^2 = 10.000 cm^2 = 1.000.000 mm^2
Para medir el volumen se utiliza el metro lineal (m^3). Cada salto de unidad de multiplica o divide por 1.000.	1 m^2 = 0,01 dam^2 = 0,0001 hm^2 = 0,000001 km^2 1 mm^2 = 0,01 cm^2 = 0,0001 dm^2 = 0,000001 m^2 1 km^3 = 1.000 hm^3 = 1.000.000 dam^3 = 1.000.000.000 m^3 1 m^3 = 1.000 dm^3 = 1.000.000 cm^3 = 1.000.000.000 mm^3

Actividades

Escriba el resultado de estas conversiones (debe poner comas y puntos)

3m = ________ mm

76 hm^2 = ________ dam^2

0,45 dam = ________ cm

25,2 mm = ________ m

70,3 hm^3 = ________ km^2

21 dm^2 = ________ m^2

87,4 km = ________ dam

32,8 cm^3 = ________ mm^3

30,02 m^2 = ________ dm^2

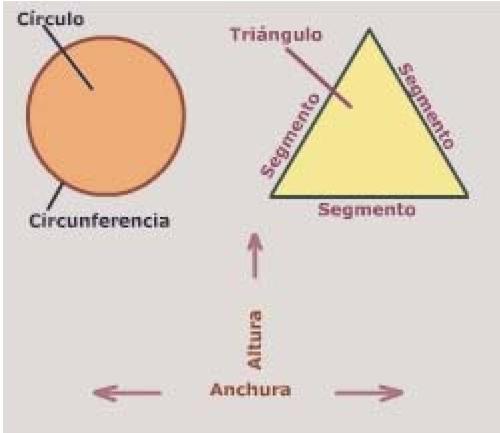
25 hm^3 = ________ km^3

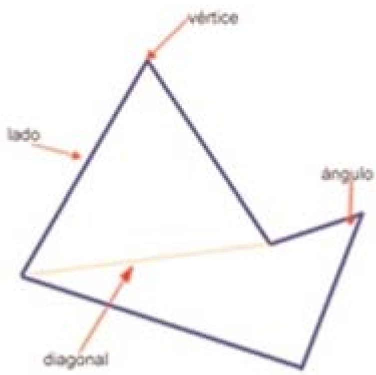
Figuras planas

Las figuras planas son aquellas cuyos puntos están en un plano; esto es, tienen anchura y altura.

Las figuras planas más complejas son:

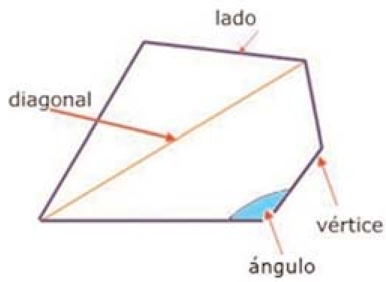
- Los polígonos, que son figuras planas cerradas, delimitadas por segmentos.
- Los círculos que son figuras planas cerradas delimitadas por una sola línea llamada circunferencia.





ELEMENTOS DE UN POLÍGONO

- Lado (cada segmento que forma la línea poligonal)
- Vértice (cada extremo de los lados del polígono)
- Ángulo (es el formado por dos lados consecutivos en el interior del polígono)
- Diagonal (es el segmento que une dos vértices no consecutivos)
- Perímetro (es la suma de las longitudes de los lados)



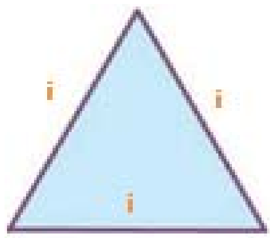
Actividades

Responda a estas preguntas:
1. ¿Qué es una figura plana?
2. ¿Qué diferencias hay entre polígonos y círculos?
3. ¿Qué diferencias hay ángulo y vértice?

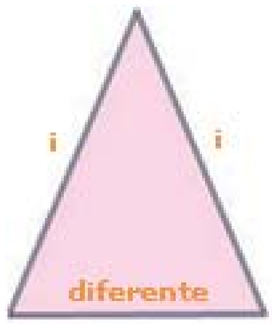
Triángulos

Es un polígono de tres lados

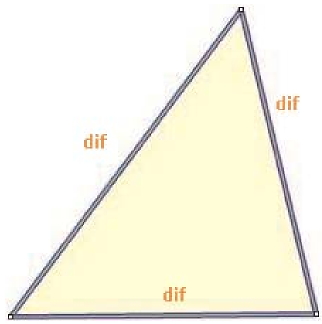
Los triángulos pueden clasificarse según son sus lados en:



Equilátero
Tres lados iguales



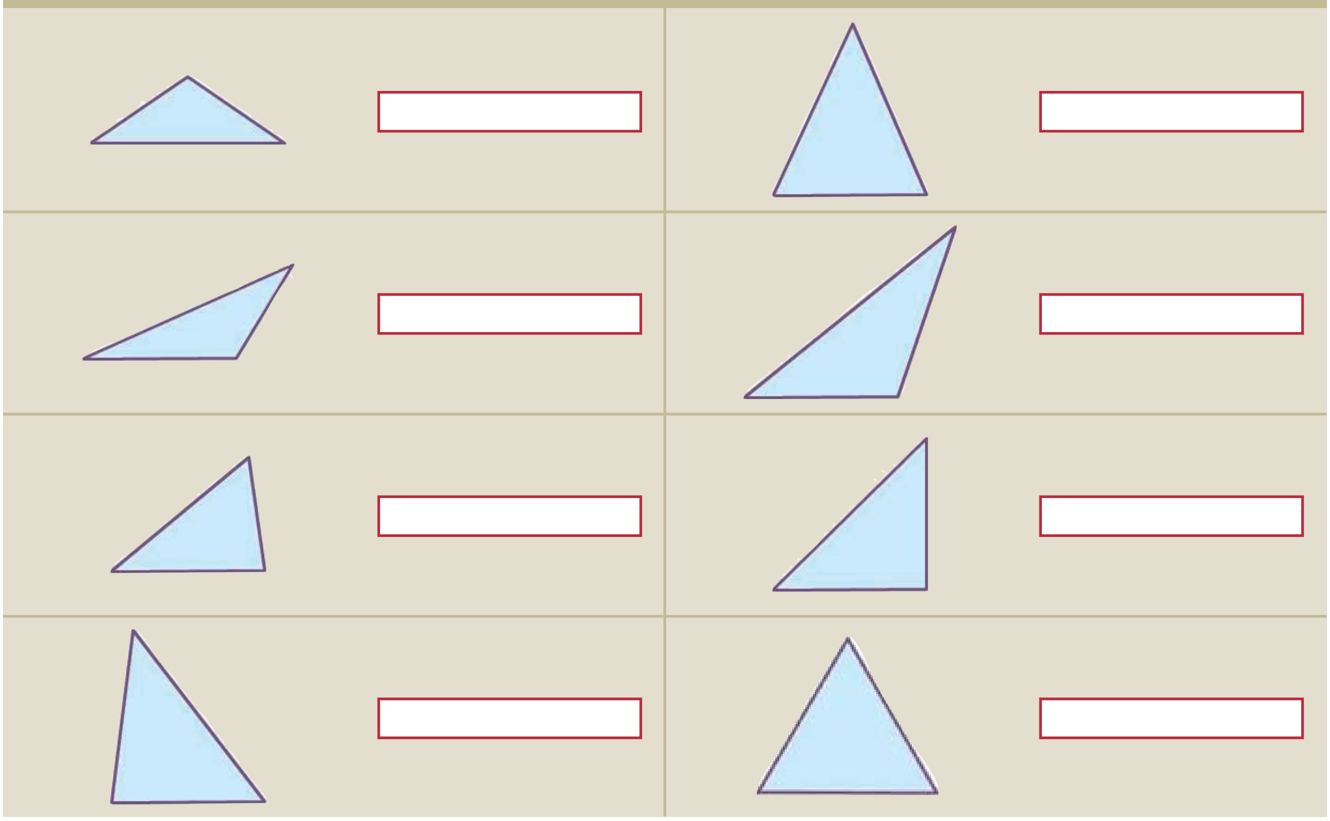
Isósceles
Dos lados iguales
y otro diferente



Escaleno
Los tres lados diferentes

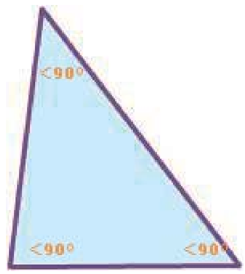
Actividades

Señale a qué tipo corresponde cada triángulo.
Ponga el número o la letra que corresponda: 1 Equilátero - 2 Isósceles - 3 Escaleno

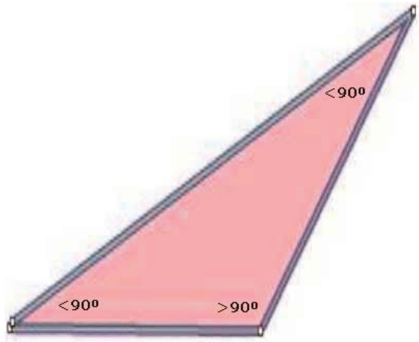


Teorema de Pitágoras

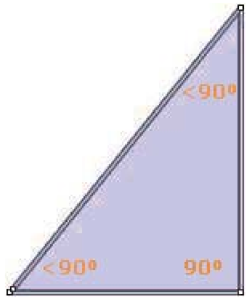
Los triángulos también se pueden clasificar según sus ángulos:



Acutángulo
Tres ángulos agudos (menos de 90º)



Obtusángulo
Un ángulo obtuso (más de 90º)



Rectángulo
Un ángulo de 90º

TEOREMA DE PITÁGORAS

Es de aplicación a los triángulos rectángulos (aquellos que tienen un ángulo de 90 º)

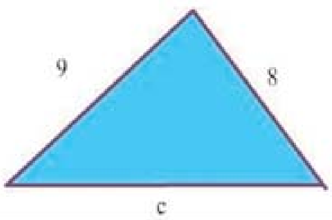
El teorema de Pitágoras dice:

"la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ejemplo 1

Cálculo de la hipotenusa "c"



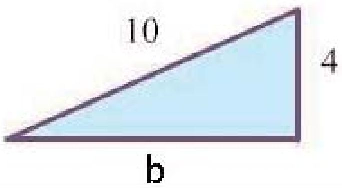
$8^2 + 9^2 = c^2 \rightarrow c^2 = 64 + 81 = 145$

Si tienes calculadora, halla c, haciendo la RAÍZ CUADRADA DE 145

$c = \sqrt{145} = 12,04$

Ejemplo 2

Cálculo del cateto "b"



$b^2 + 4^2 = 10^2 \rightarrow b^2 = 10^2 - 4^2$

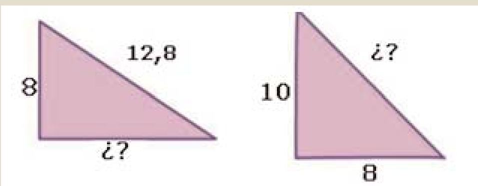
$b^2 = 100 - 16 = 84$

Si tienes calculadora, halla b, haciendo la RAÍZ CUADRADA de 84

$b = \sqrt{84} = 9,2$

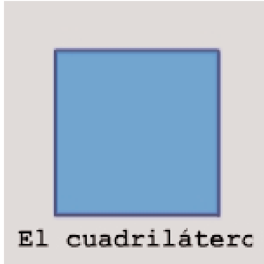
Actividades

Después de analizar y comprender los ejemplos, halle el cateto y la hipotenusa de estos triángulos:

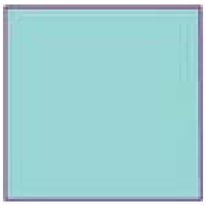


Cuadriláteros

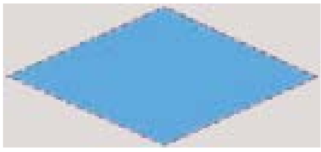
Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados.



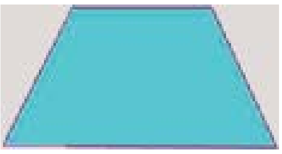
Tipos de cuadriláteros:


Cuadrado

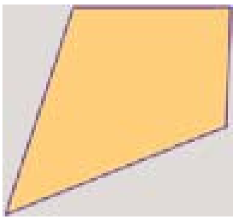

Rectángulo

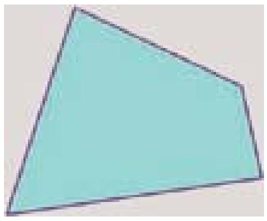

Rombo


Romboide


Trapecio


Trapezoide


Trapezoide


Trapezoide

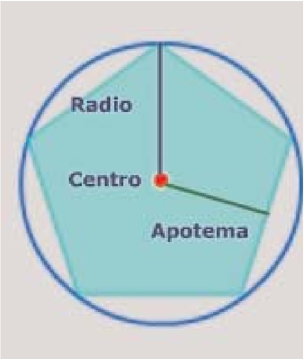
Actividades

Sabiendo que llamamos PARALELOGRAMOS a los cuadriláteros que tienen paralelos los lados opuestos, diga cuáles de las figuras anteriores corresponden a esta categoría

Polígonos regulares

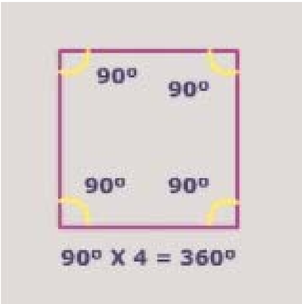
Un polígono regular es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales.

Todos los polígonos regulares se pueden trazar en el interior de una circunferencia (es la circunferencia menor que contiene al polígono)



Elementos de un poligono regular:

- Centro es el punto que equidista (está a la misma distancia) de los vértices, coincide con el centro de la circunferencia que envuelve al polígono.
- Radio es cualquier segmento que une el centro con un vértice, coincide con el radio de la circunferencia que envuelve al polígono.
- Apotema es el segmento que une el centro con el punto medio de un lado del polígono.



La suma de los ángulos de un polígono de "n" lados (número de lados del polígono) es igual a:

(n – 2) x 180º

Para el triángulo el ángulo = (3-2) x 180º = 180º
Para el cuadrado el ángulo = (4-2) x 180º = 360º
Para el pentágono el ángulo es = (5-2) x 180º = 540º
Para el hexágono el ángulo es = (6-2) x 180º = 720º

Circunferencia y círculo

Circunferencia es el *conjunto de puntos del plano que distan lo mismo de otro punto llamado centro.*

Círculo es el *área limitada por una circunferencia*

Para poder analizar y estudiar las circunferencias y los círculos es necesario conocer la letra griega "pi"

$$\pi$$

Pi equivale a 3,1416

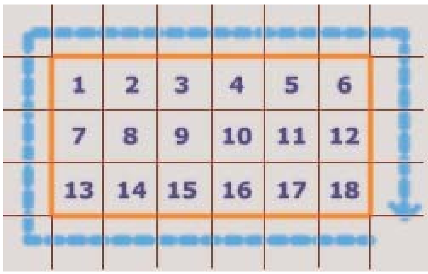
Para hallar la longitud de una circunferencia o, lo que es lo mismo, el perímetro de un círculo se utiliza la fórmula:

$$\text{Longitud circunferencia} = 2 \times \pi \times \text{radio}$$

Actividades

Responda a estas preguntas:
1. ¿Cuánto mide una circunferencia que tiene 3 metros de diámetro?
2. ¿Cuál es el perímetro de un círculo que tiene 3 metros de radio?
3. ¿Qué diferencias hay circunferencia y círculo?

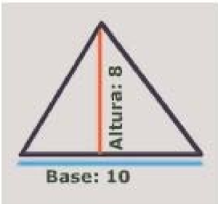
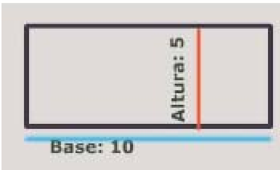
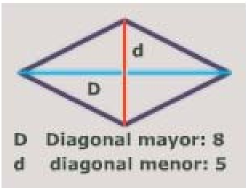
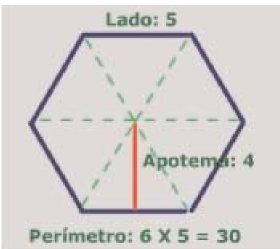
Áreas de figuras planas



Debe recordar y distinguir los conceptos de:

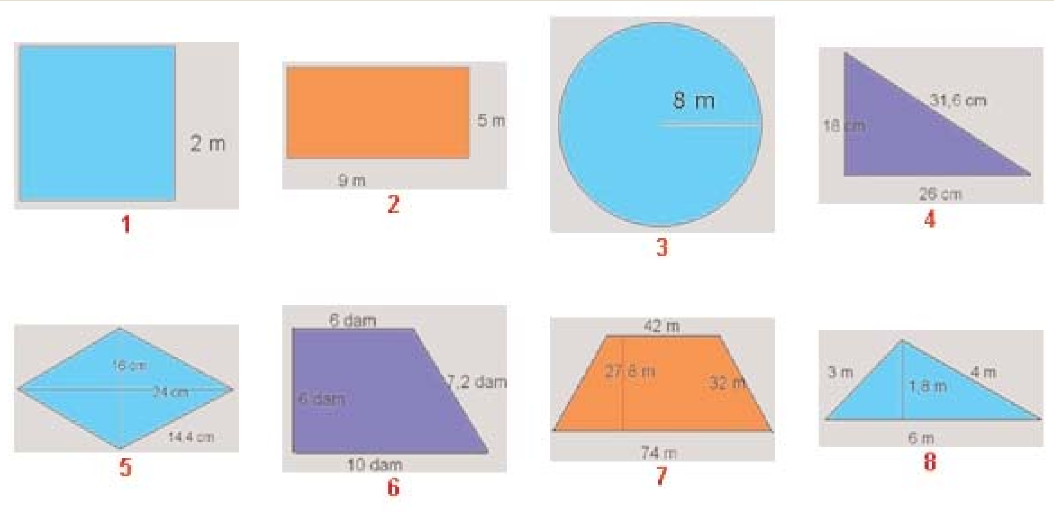
- Perímetro es la longitud de la línea que rodea a la figura plana.
- Área es la porción de plano ocupada por la figura.

Las áreas de las figuras geométricas se miden aplicando fórmulas matemáticas a las dimensiones de algunas longitudes

TRIÁNGULO		Para calcular el área del triángulo debemos medir o saber antes dos longitudes: la base y la altura del triángulo. $\text{area} = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ $\dfrac{10 \times 8}{2} = 40$
RECTÁNGULO		Para calcular el área del rectángulo debemos medir o conocer antes dos longitudes: la base y la altura. Área = base x altura $10 \cdot 5 = 50$
ROMBO		Para calcular el área del rombo debemos medir o conocer antes dos longitudes: la diagonal mayor y la diagonal menor. Área = D x d / 2 $8 \cdot 5 = 40$
TRAPECIO		Los lados paralelos de la figura se llaman bases, y la distancia entre las bases se llama altura. Para calcular el área de un trapecio debemos medir o conoce antes las bases y la altura. $\text{Área} = \dfrac{(8m + bm) \times \text{altura}}{2}$ $\dfrac{(12 + 7) \times 5}{2} = 47{,}5$
POLÍGONOS REGULARES		Un polígono regular puede descomponerse en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. $\text{Área} = \dfrac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$ $\dfrac{30 \times 4}{2} = \dfrac{120}{2} = 60$
CÍRCULO		$\text{Área} = n \cdot r^2$ 3,1416 x 16 = 50,2556

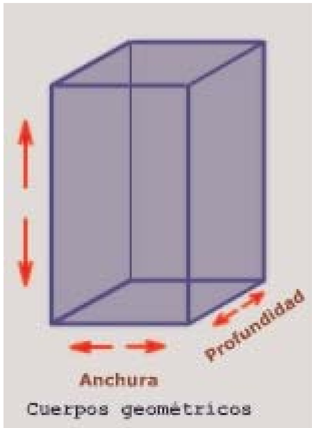
Actividades

Halle el área de las siguientes figuras:



Cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos, son todas aquellas figuras que tienen TRES DIMENSIONES (anchura, altura y profundidad) o, lo que es lo mismo, volumen o capacidad, ocupando un lugar en el espacio.



Las partes básicas de un cuerpo geométrico son:

- Base
- Caras laterales
- Altura

Las figuras geométricas más importes son:

- Prisma
- Pirámide
- Cilindro
- Cono
- Esfera

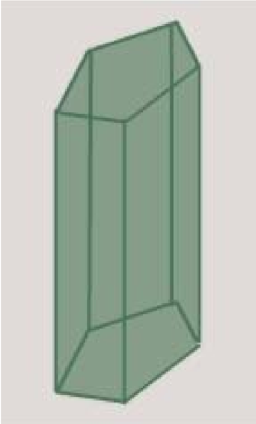
Thales. Una página sobre el volumen en los cuerpos geométricos
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0263-02/geometria/indice2.htm

Actividades

Responda a estas preguntas:
1. ¿Qué es una figura geométrica?
2. ¿Qué diferencias hay entre figuras geométricas y figuras planas?

Prisma

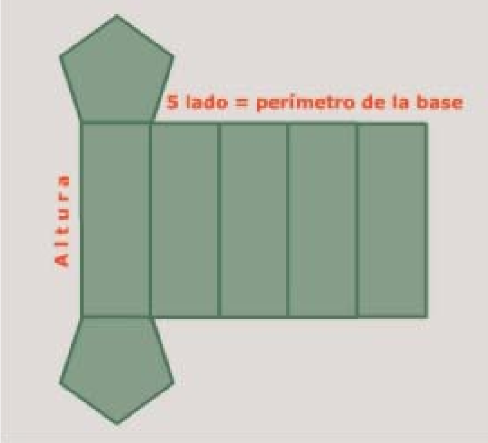
Un prisma es una figura geométrica formada por varios cuadriláteros iguales llamados caras laterales, y dos polígonos iguales y paralelos llamados bases.



A los cuerpos geométricos limitados por caras planas se les llama poliedros

Los prismas se denominan según sean sus bases. Por ejemplo:

- Prisma triangular (sus bases son triángulos)
- Prisma cuadrangular (sus bases son cuadrados)
- Prisma pentagonal (sus bases son pentágono)



La superficie de un prisma es la suma de las superficies de todas sus caras.

Para visualizar esta idea *desarrollamos* el prisma o imaginamos que lo recortamos y lo extendemos sobre una superficie plana.

Área del prisma =
(perímetro de la base x altura) + (àrea de la base x 2)

El volumen de un prisma se calcula con la siguiente fórmula:

Volumen del prisma = área de la base x altura

Para hallar el área de la base se utilizan las fórmulas que aparecen en "figuras planas"

Actividades

Responda a estas preguntas:

1. Halle el área de un prisma cuadrangular, que tiene unas bases con lados de 33 cm, y una altura de 75 cm.
2. Halle el volumen de un prisma triangular, que tiene unas bases con lados de 33 cm (altura del triángulo de la base de 28,58 cm), y una altura de 75 cm.

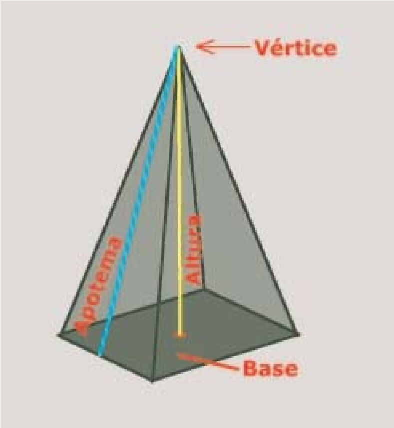
Pirámide

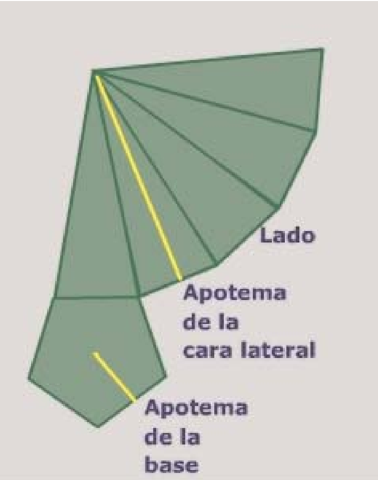
Una pirámide es un cuerpo geométrico que tiene como *base un polígono y cuyas caras laterales son triángulos* con un vértice común.

A los cuerpos geométricos *limitados por caras planas* se les llama poliedros

Las pirámides se denominan según sean sus bases. Por ejemplo:

- Pirámide triangular (sus bases son triángulos)
- Pirámide cuadrangular (sus bases son cuadrados)
- Pirámide pentagonal (sus bases son pentágono)





La superficie de una pirámide es la suma de las superficies de todas sus caras.

Para visualizar esta idea desarrollamos la pirámide o imaginamos que la recortamos y la extendemos sobre una superficie plana.

Área de la pirámide = (superficie de una cara lateral x número de caras laterales) + (àrea de la base)

La fórmula para hallar el área del triángulo es:

Superficie de la base x Altura / 3

El volumen de una pirámide se calcula con la siguiente fórmula:

Volumen de la pirámide = área de la base x altura / 3

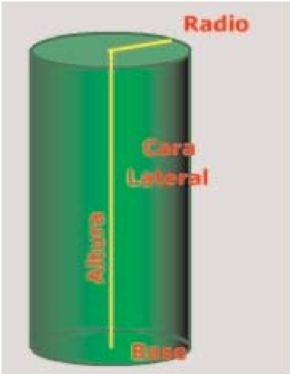
Actividades

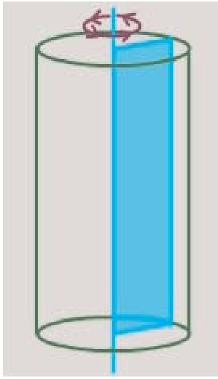
Responda a estas preguntas:

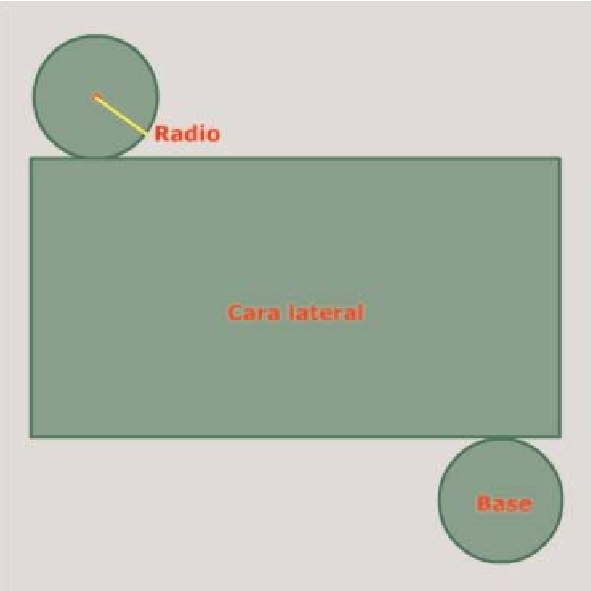
1. Halle el área de una pirámide cuadrangular, que tiene una base con lados de 5 m, y una apotema de la cara lateral de15 m.
2. Halle el volumen de una pirámide triangular, que tiene unas bases con lados de 4 m (altura del triángulo de la base de 3,46 m), y una altura de 20 m.

Cilindro

Un cilindro es la figura geométrica que se obtiene al hacer girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.







La superficie de un cilindro es la suma de las superficies de todas sus caras, que son dos círculos y un rectángulo.

Para visualizar esta idea desarrollamos el cilindro o imaginamos que lo recortamos y lo extendemos sobre una superficie plana.

Área del cilindro = (perímetro de la base x altura) + (àrea de la base x 2)

La fórmula para hallar el área del círculo es:

$$\pi r^2$$

El volumen de un prisma se calcula con la siguiente fórmula:

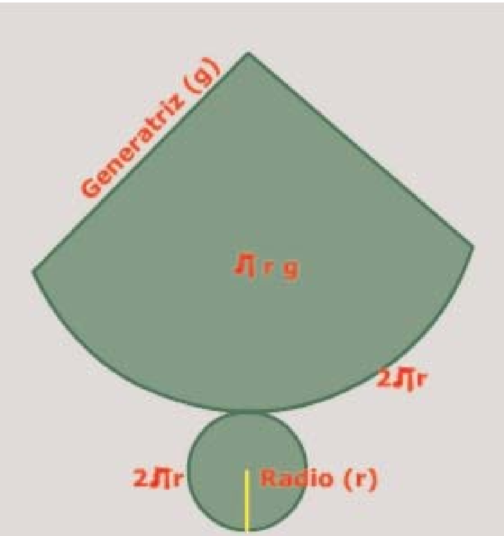
Volumen del cilindro = área de la base x altura

Actividades

Resuelva esta actividad:
1. Halle el área y el columen de un cilindro, que tiene unas bases con radio de 4 dm, y una altura de 1 m.

Cono

Un cono es la figura geométrica que se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo *alrededor de uno de sus catetos.*



La **superficie** del cono será la de su *área lateral* que es un sector circular *más el área del circulo de la base*

Para visualizar esta idea *desarrollamos* el cono o imaginamos que lo recortamos y lo extendemos sobre una superficie plana.

Área del cono:

Superficie de la base: πr^2

Superficie de la cara lateral: $\pi r \times g$

Superficie total:

$(\pi r^2) + (\pi r \times g)$

El **volumen** de un cono se calcula con la siguiente fórmula:

Volumen del cono = área de la base x altura / 3

Actividades

Responda a estas preguntas:
1. Halle el área y el volumen de un cono que tiene de radio 3 m y de generatriz 10 metros

Esfera

La esfera es la figura geométrica que se obtiene al hacer girar un semicírculo alrededor de un diámetro.

Ejemplo:

Cálculo del área y del volumen de una esfera que tiene de radio 5 m

$$\text{Área} = 4 \text{ x } 3{,}1416 \text{ x } r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \text{ x } 5^2 = 314 \text{ m}^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\ 3{,}1416 \times r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \times 5^3 = 523{,}3 \text{ m}^3$$

La superficie de una esfera se calcula con la siguiente fórmula:

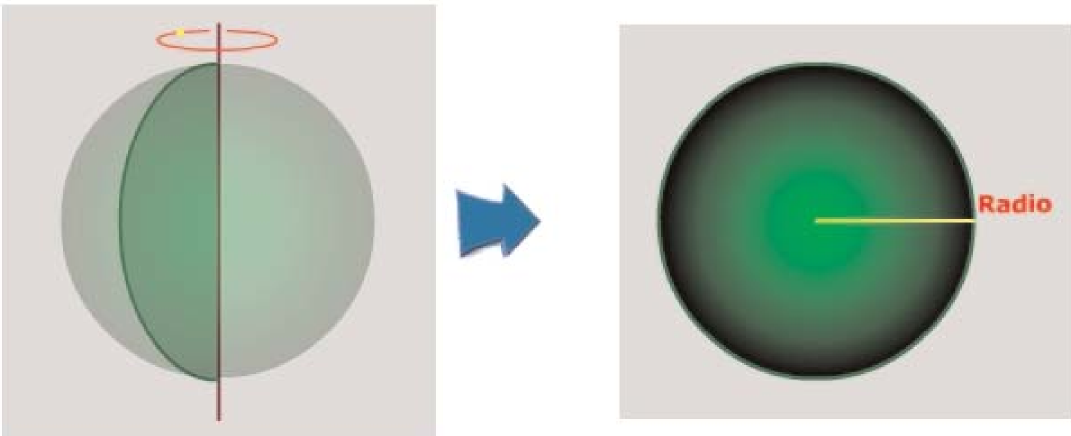
Superficie de la esfera =

$$4\pi r^2$$

El volumen de una esfera se calcula con la siguiente fórmula:

Volumen de la esfera =

$$4\pi r^3 / 3$$



Actividades

Resuelva esta actividad:

1. Halle el área y el volumen de una esfera que tiene de radio 0,5 dam

Ejercicios

Realiza los ejercicios de esta sección de geometría para consolidar los contenidos. Practicar es la única forma de retener fórmulas y habituarse a operar con distintas unidades del Sistema Métrico Decimal. Ahora vas a realizar ejercicios sobre:

- Sistema Métrico Decimal
- Área de figuras planas
- Volúmenes

Recuerda: antes de plantear el problema debes pasar todas las medidas al mismo sistema de unidades (m, m^2, m^3, dm, dm^2, dm^3...).

Sistema Métrico Decimal

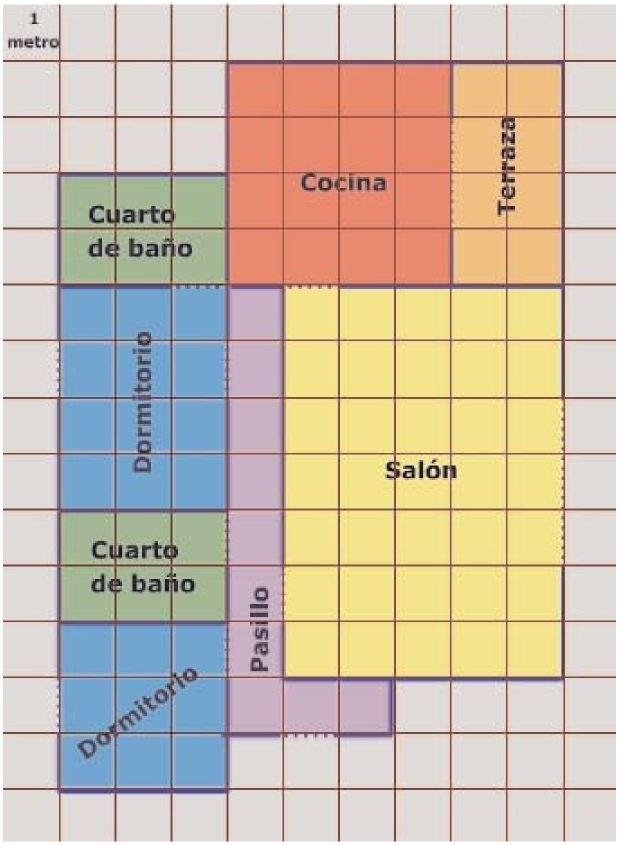
Responda a las siguientes cuestiones:

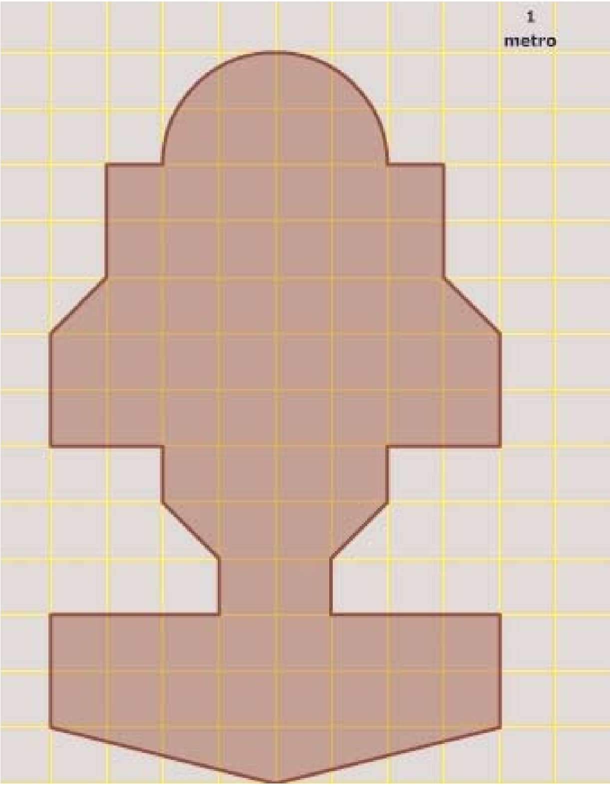
1. ¿Cuántos centímetros cuadrados son 3,79 decámetros cuadrados?
2. ¿Cuántos decímetros cúbicos caben en 2,33 kilómetro cúbico?
3. ¿Cuántos milímetros cuadrados hay de diferencia entre 0,0006 kilómetros cuadrados y 5.870.000 centímetros cuadrados?
4. ¿Cuántas horas tardará en recorrer 5,6 kilómetros una tortuga que avanza a 16 decámetros por hora?
5. Un litro de agua pesa un kilogramo y equivale a un decímetro cúbico de volumen ¿cuánto pesará el agua que cabe en un recipiente con forma de cubo, que tiene un decámetro de lado en cada una de sus caras?

Figuras planas

Este dibujo se corresponde con el plano de una vivienda que queremos embaldosar. Señale:

1. Los metros cuadrados de cada habitación, incluida la terraza.
2. Los decámetros cuadrados que ocupa toda la vivienda.
3. El número de baldosas que necesitaremos, sabiendo que el modelo elegido tiene forma de cuadrado y tiene 250 milímetros de lado.
4. El precio del embaldosado, teniendo en cuenta que el metro cuadrado de baldosas cuesta 30 euros, la mano de obra 30 euros/hora, tiempo en el que embaldosa 1,5 metros cuadrados. Al final, añada un 16% de IVA.



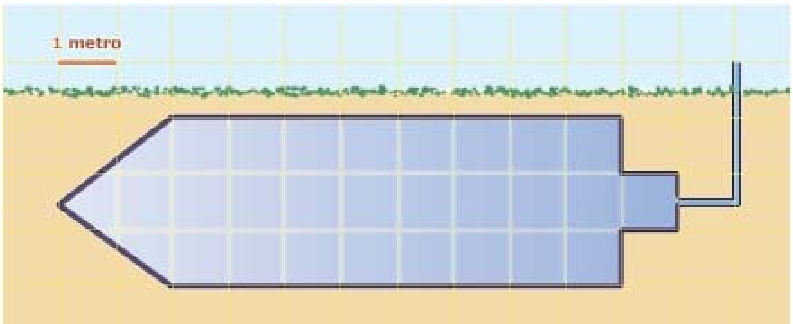


Halle el área de esta figura geométrica y señale su superficie en todas sus unidades de medida kilómetros, hectómetros, etc).

Para ello debe:

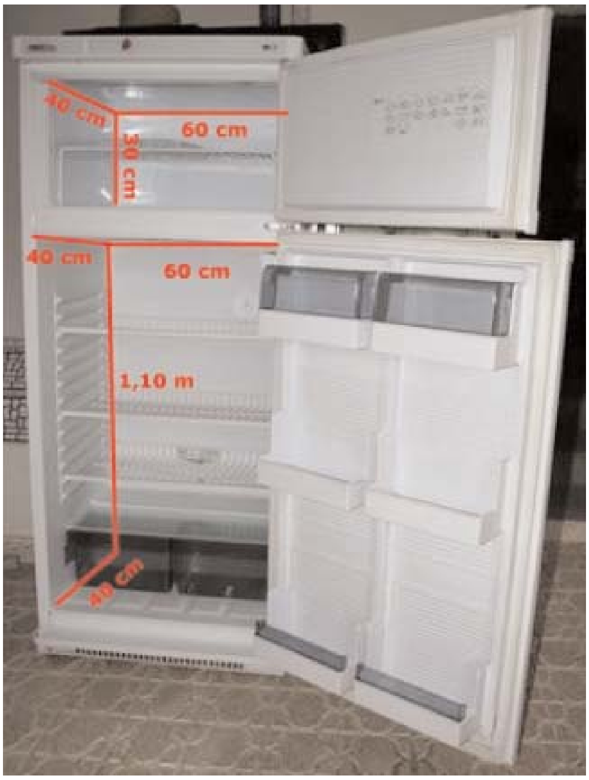
1. Descomponer la figura en otras más sencillas.
2. Hallar el área de estas otras y sumarlas.
3. Convertir los resultados a las diferentes unidades.

Volúmenes



El dibujo corresponde al croquis de un depósito de agua cuyo interior se pretende pintar para impedir filtraciones.

1. Calcule el área y el volumen del depósito.
2. Señale la pintura que será necesaria para pintarlo, sabiendo que un kilogramo de pintura permite cubrir 7.500 centímetros cuadrados.
3. Calcule los minutos que serán necesarios para pintarlo, sabiendo que en una hora un trabajador pinta 0,04 decámetros cuadrados.

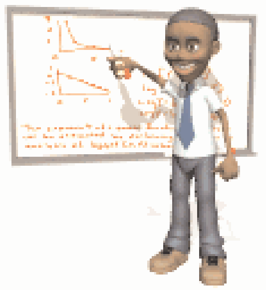


Halle el volumen o la capacidad de este frigorífico y exprésela en centímetros cúbicos y en litros de agua (un litro equivale a un decímetro cúbico)

ESTADÍSTICA. FUNCIONES

6

INTRODUCCIÓN



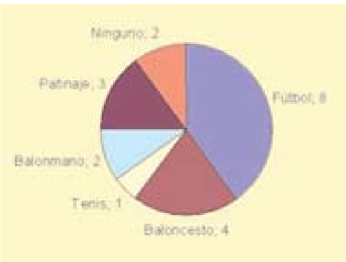
En esta unidad vamos a trabajar la **estadística**, en la primera parte, y las **funciones**, en la segunda.

Primero estudiaremos los conceptos básicos de estadísticas: población y muestra, frecuencia absoluta y relativa y su representación gráfica, diagramas de barras, líneas y sectores tan populares en los medios de comunicación.

Después estudiaremos las funciones, su concepto (relación establecida entre dos o más magnitudes) y aprenderemos a representarlas gráficamente. Volveremos a trabajar con letras y números.

Todas las representaciones gráficas (diagramas de frecuencias o representación gráfica de funciones) son muy habituales en los medios de comunicación, pero ten en cuenta que modificando la escala de los ejes, podemos conseguir efectos distintos, resaltando los aumentos o minorizando las disminuciones. Por eso, si estás realmente interesado, no te dejes engañar con los gráficos: estudia por ti mismo los datos.

ESTADÍSTICA



En esta unidad vamos a trabajar el tema de Estadística.

La estadística se ocupa de *ordenar y presentar de forma que sean utilizables y permitan extraer conclusiones fiables, los datos referidos a fenómenos colectivos.*

Los resultados de los estudios estadísticos se pueden representar mediante gráficos.

Población y muestra. Variables estadísticas

Antes de realizar un estudio estadístico es necesario definir con claridad los siguientes conceptos:

La población o colectivo estudiado, es decir, el conjunto de personas u objetos que se desea investigar.

La muestra, es decir, un subconjunto representativo de la población. Dependiendo del tamaño de la población y del tipo de estudio se trabajará con una muestra o con toda la población.

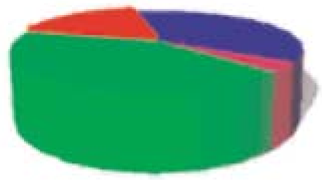
La variable estudiada, es decir, qué característica de los individuos de la población se desea observar. Las variables estadísticas las podemos clasificar en:

- Cualitativas: los datos no son números, Por ejemplo el lugar de nacimiento, nombre de personas, opinión sobre un servicio público (bueno, regular, malo), etc.

- Cuantitativas: Los datos son números. Por ejemplo edad, peso, talla, número de páginas de un libro, etc. Las variables cuantitativas pueden ser a su vez:
  - Discreta: si sólo puede tomar valores enteros o valores reales aislados.
    Por ejemplo, si hacemos un estudio sobre el número medio de hijos que tienen las mujeres en un determinado lugar.
  - Continua: si, teóricamente, puede tomar cualquier valor real dentro de ciertos intervalos.
    Por ejemplo, si hacemos un estudio sobre la altura media de las personas de un lugar, señalando varios grupos de altura y el porcentaje de personas que se incluyen en cada uno de esos grupos.

Pasos que se realizan cuando se hace un estudio estadístico:

1. ¿Qué se quiere conocer con ese estudio estadístico?
2. Elección de la variable que se va a estudiar.
3. Recogida de datos.
4. Organización de datos: tabla de frecuencias y representación gráficas.
5. Cálculo de parámetros estadísticos.



Ejemplo:

En una ciudad de 100.000 habitantes podemos realizar estudios estadísticos diferentes como:

1. La edad de los habitantes.
2. La intención de voto en unas elecciones.
3. El número de pie de los habitantes.
4. El deporte favorito de los escolares
5. El peso de los recién nacidos en un año.

Para estos casos, vamos a determinar con claridad los aspectos anteriores:

1. La edad de los habitantes.
   a. Población: los 100.000 habitantes de la ciudad.
   b. Variable: el número de años de cada habitante. Es una variable cuantitativa discreta.
   c. Muestra: según para qué se realice el estudio, no es necesario trabajar con las 100000 edades de los habitantes y podemos obtener conclusiones válidas trabajando con las edades de sólo un grupo de habitantes. Si se hace esto, se está trabajando con una muestra; esta muestra debe de estar bien elegida y ser representativa de las edades de los habitantes de la ciudad.
2. La intención de voto en unas elecciones.
   a. Población: los habitantes con derecho a voto de esa ciudad.
   b. Variable: los partidos políticos que se presentan a las elecciones. Es una variable cualitativa.
   c. Muestra: el día de las elecciones, la muestra es toda la población; en cualquier sondeo anterior, se trabaja con muestras más pequeñas.
3. El número de pie o talla de zapatos de los habitantes
   a. Población: los 100.000 habitantes de la ciudad.
   b. ariable: el número de pie de cada habitante. Es una variable cuantitativa discreta.
   c. Muestra: el grupo de habitantes elegido para ello.

Actividades

Explique población, variable y muestra para un estudio sobre el deporte favorito de los escolares y sobre el peso de los recién nacidos en la citada población de 100.000 habitantes.

Frecuencia absoluta y relativa. Tabla de frecuencias.

Frecuencia absoluta de un valor de la variable: es el *número de veces que se repite* ese valor de la variable.

Se suele utilizar la notación f_i

Frecuencia relativa de un valor de la variable es el c*ociente entre la frecuencia absoluta de ese valor de la variable y el número total de datos.*

Se suele utilizar la notación h_i

La frecuencia relativa es también el tanto por uno de ese valor, y sin más que multiplicar por 100 se obtiene el tanto por ciento (%), valor más utilizado por ser más gráfico.

Ejemplo:

En una clase de 20 alumnos, las notas de C. Sociales han sido las siguientes:
7,6,4,8,5 2,7,6,5,9 1,7,3,4,9, 6,6,5,9,10.

En una clase, que tiene 20 alumnos, las notas de Lengua han sido las siguientes:

7, 6, 4, 8, 5,
2, 7, 6, 5, 9,
1, 7, 3, 4, 9,
6, 6, 5, 9, 10

Frecuencias

Para el valor 7 de la variable

7, 6, 4, 8, 5,
2, 7, 6, 5, 9,
1, 7, 3, 4, 9,
6, 6, 5, 9, 10

Frecuencia absoluta: 3

Frecuencia relativa: $\frac{3}{20} = 0,15$

En tanto por ciento: $0,15 \cdot 100 = 15\%$

Una vez halladas las frecuencias de todas las variables se pueden organizar en una tabla de frecuencias que consta de cuatro columnas:

x_i (notas)	f_i (f. absoluta)	h_i (f. relativa)	%
1	1	0,05	5
2	1	0,05	5
3	1	0,05	5
4	2	0,10	10
5	3	0,15	15
6	4	0,20	20
7	3	0,15	15
8	1	0,05	5
9	3	0,15	15
10	1	0,05	5
sumas →	20	1,00	100

La tabla nos facilita la obtención de información sobre el problema. Por ejemplo, podemos saber que:

- Han obtenido una nota de 10 un 5% de los alumnos
- Han suspendido (notas menores de 5) 5 alumnos, un 25 %

Actividades

Al lanzar 25 veces un dado se han obtenido los siguientes resultados:
6,4,1,4,5,
5,5,5,1,1,
2,1,3,4,5,
4,3,1,4,5,
2,4,4,6,3,

Construya la tabla de frecuencias y conteste a las siguientes preguntas:

a) ¿De qué tipo de variable se trata?

b) ¿Cuál es el valor que tiene más frecuencia absoluta? ¿Y el que menos?

c) ¿Cuál es la frecuencia relativa del valor 4?

d) ¿Qué % de tiradas ha salido 5?

e) ¿Qué % de tiradas han sido menores o iguales que 3?

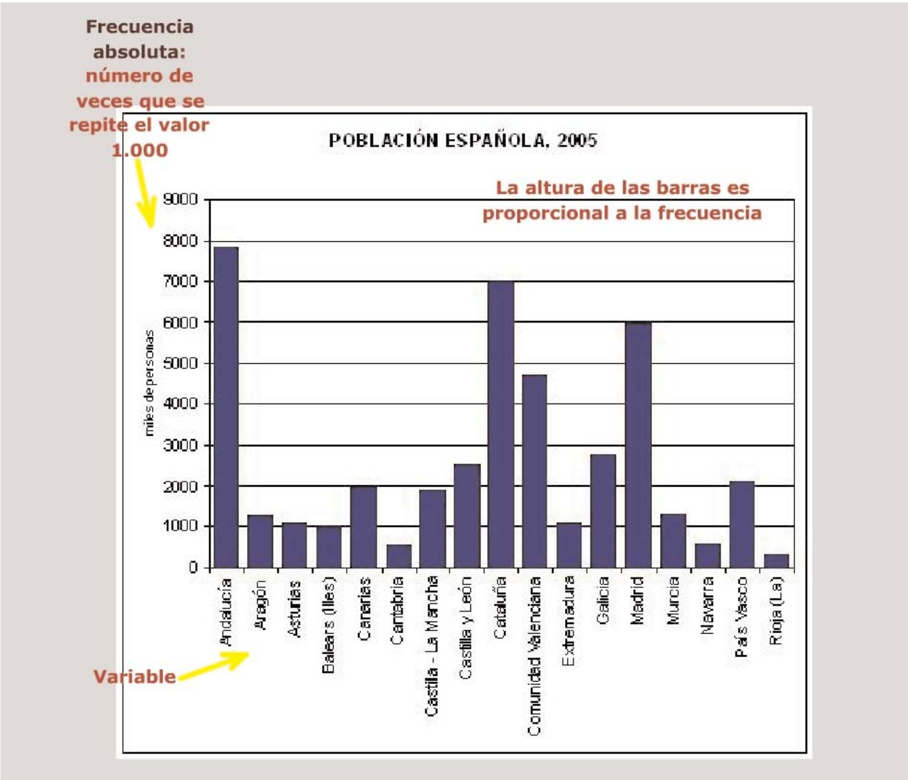
Diagrama de barras

Los datos de la tabla de frecuencias se suelen presentar de distintas formas gráficas, que es como la solemos encontrar habitualmente en medios de comunicación, en trabajos empresariales, etc. Empezaremos con el diagrama de barras.

Diagrama de barras:

Sirve para representar las variables cualitativas y las cuantitativas discretas.

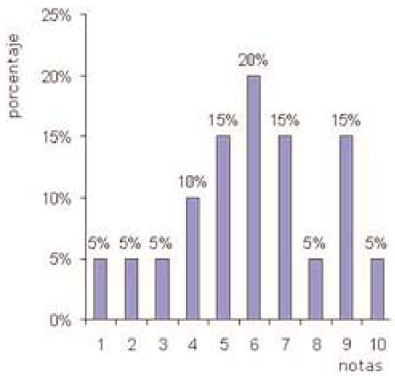
Es una representación gráfica formada por barras finas separadas y de forma que la altura de las barras es proporcional a las frecuencias.



NOTA: Es muy frecuente que en el diagrama de barras se representen los porcentajes en lugar de las frecuencias. Veámoslo con el ejemplo de al lado:

X_i	f_i	h_i	&
1	1	0,05	5
2	1	0,05	5
3	1	0,05	5
4	2	0,10	10
5	3	0,15	15
6	4	0,20	20
7	3	0,15	15
8	1	0,05	5
9	3	0,15	15
10	1	0,05	5
	20	**1**	**100**

El diagrama de barras será:



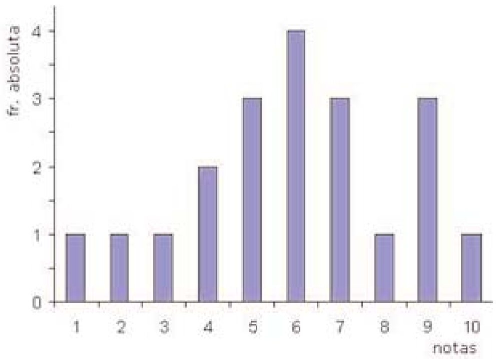
Ejemplo (variable cuantitativa)

En una clase de 20 alumnos, las notas de C. Sociales han sido las siguientes:
7,6,4,8,5 2,7,6,5,9 1,7,3,4,9, 6,6,5,9,10

Su tabla de frecuencias será:

Notas X_i	Frecuencia f_i
1	1
2	1
3	1
4	2
5	3
6	4
7	3
8	1
9	3
10	1
	20

Su diagrama se barras será:



Actividades

Preguntados los alumnos de una clase qué deporte practican con más frecuencia, se obtuvieron los siguientes resultados:

X_i	f_i	Frecuencia relativa	Porcentajes
Fútbol	8		
Baloncesto	4		
Tenis	1		
Balonmano	2		
Patinaje	3		
Ninguno	2		
	20		

Complete la tabla con la frecuencia relativa y los porcentajes y realice el diagrama de barras con los datos de frecuencia absoluta.

Polígono de frecuencias

Es una representación gráfica que se construye a partir del diagrama de barras, uniendo los puntos medios de la parte superior de las barras. Al hacerlo aparece una línea poligonal y por eso se llama polígono de frecuencias.

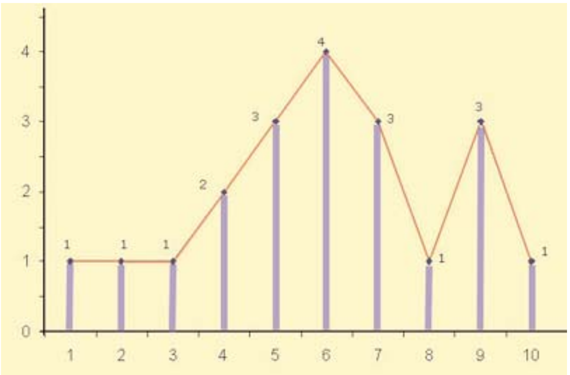
A veces nos lo podemos encontrar sin el diagrama de barras.

Ejemplo:

En el ejemplo de las notas de C. Sociales del capítulo del diagrama de barras:

Notas X_i	Frecuencia f_i
1	1
2	1
3	1
4	2
5	3
6	4
7	3
8	1
9	3
10	1
	20

El polígono de frecuencias será:



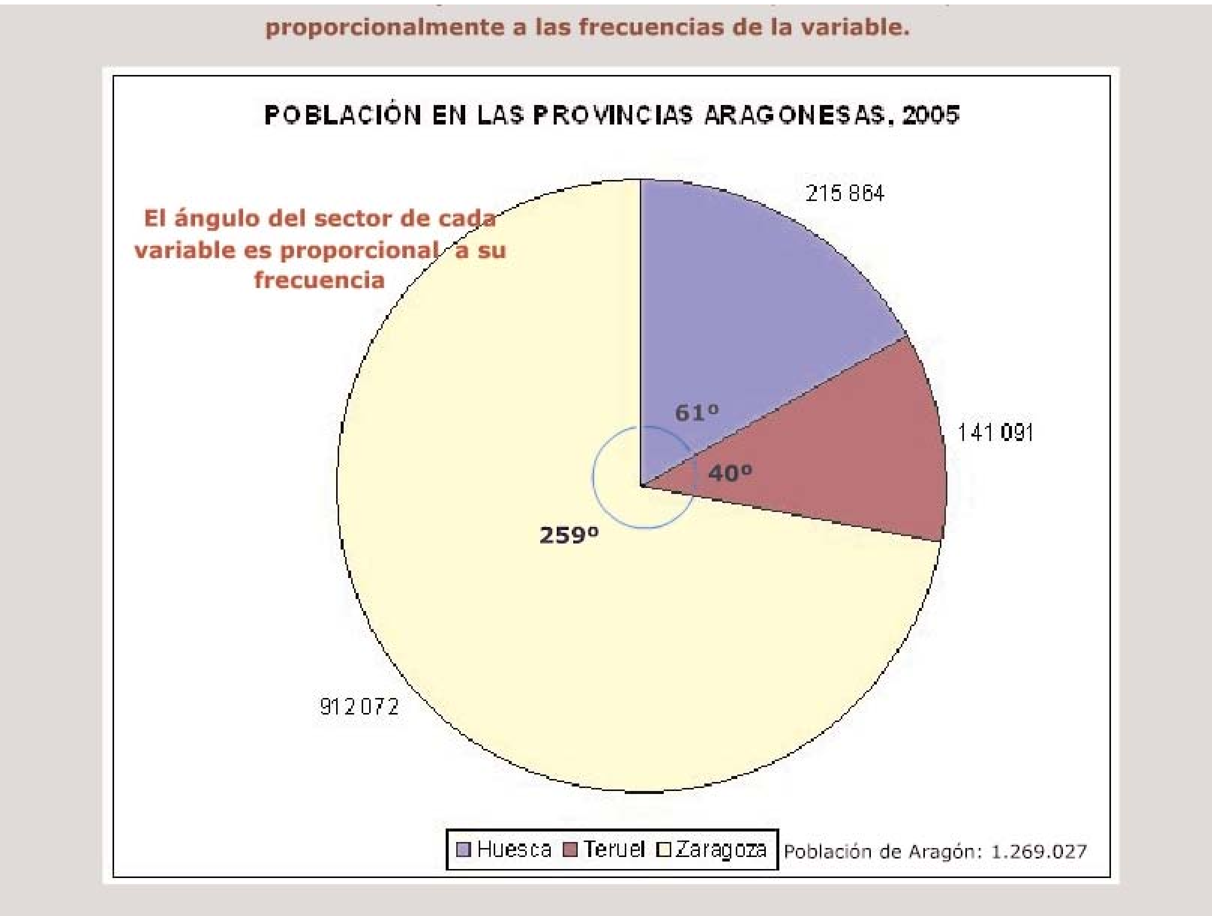
Actividades

Con la tabla de frecuencia relativa y porcentajes del ejemplo sobre notas de Ciencias Sociales, que aparece en el capítulo del diagrama de barras, realice el polígono de frecuencias del porcentaje de la frecuencia relativa.

Diagrama de sectores

Sirve para representar variables de cualquier tipo.

Se trata de repartir el área de un círculo, con sectores, proporcionalmente a las frecuencias de la variable. El ángulo del sector de cada variable es proporcional a su frecuencia.



Actividades

Realice un diagrama de sectores con los datos sobre el número de hermanos que tienen los 40 jóvenes que participan en una excursión.

Nº hermanos	Frecuencia
1	13
2	20
3	6
4	0
5	1

Pictogramas

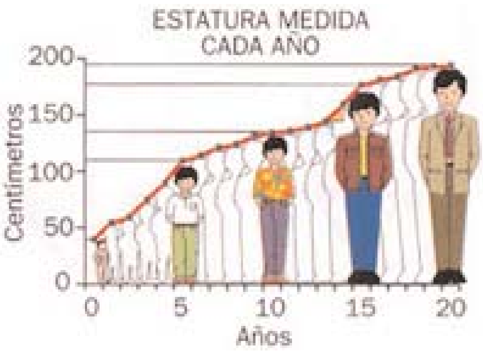


Diagrama para representar la estatura (el crecimiento) a lo largo de los primeros veinte años de la población de un lugar. Se utilizan pictogramas con figuras humanas.

Son representaciones gráficas, en las que se utiliza figuras relacionadas con el tema que se trate. Tienen la ventaja de que atraen la atención del no experto, pero son mucho menos rigurosos que los anteriores. Aparecen mucho en prensa.

El tamaño de las figuras mantiene una proporción con los datos representados.

Media, moda y mediana

Son medidas de centralización y nos indican en torno a qué valor se agrupan los datos.

Media

Es el valor que resulta al dividir la suma de todos los datos entre el número total de datos. Se utiliza el símbolo $\bar{x}$.

Sólo tiene sentido para variables cuantitativas.

Ejemplo:

En una clase de 20 alumnos, las notas de C. Sociales han sido las siguientes:
7,6,4,8,5 2,7,6,5,9 1,7,3,4,9, 6,6,5,9,10

Notas x_i	F. absoluta f_i
1	1
2	1
3	1
4	2
5	3
6	4
7	3
8	1
9	3
10	1

Suma de f_i = 20

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+4+5+5+5+6+6+6+6+7+7+7+8+9+9+9+10}{20} =$$

$$= \frac{1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 4+7\cdot 3+8\cdot 1+9\cdot 3+10\cdot 1}{20} = \frac{119}{20} = 5{,}95$$

Si observamos el ejemplo para obtener la media, en el numerador se suma cada valor por su frecuencia.

Su fórmula es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{N} = $$
$$= \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N}$$

Siendo N el número total de datos y un símbolo que se llama sumatorio e indica, en este caso, la suma de los productos x_i **-** f_i (valor de la variable por su frecuencia).

Es muy cómodo para realizar los cálculos de forma sistemática, completar las dos primeras columnas de la tabla de frecuencias, de la siguiente manera:

Notas x_i	F. absoluta f_i	$x_i \cdot f_i$
1	1	1 x 1 = 1
2	1	2 x 1 = 1
3	1	3 x 1 = 3
4	2	4 x 2 = 8
5	3	5 x 3 = 15
6	4	6 x 4 = 24
7	3	7 x 3 = 21
8	1	8 x 1 = 8
9	3	9 x 3 = 27
10	1	10 x 1 = 10
Suma de f_i	N = 20	$\Sigma x_i \cdot f_i = 119$

La media es el resultado de dividir $\Sigma x_i \cdot f_i$ por N

$$\text{media} = \frac{119}{20} = 5{,}95$$

Esto quiere decir que si el total de las notas obtenidas se repartiese entre los 20 alumnos cada uno habría sacado 5,95 de nota.

Actividades

Halle la media del número de hermanos que tienen los 40 jóvenes que participan en una excursión.

Nº hermanos	Frecuencia
1	13
2	20
3	6
4	0
5	1

Moda

Es el valor o valores que tienen mayor frecuencia, es decir el que más se repite ("lo que más se lleva es la moda"). Se puede calcular tanto para variables cuantitativas como cualitativas.

Ejemplo:

En una clase de 20 alumnos, las notas de C. Sociales han sido las siguientes:
7,6,4,8,5 2,7,6,5,9 1,7,3,4,9, 6,6,5,9,10

Notas x_i	F. absoluta f_i
1	1
2	1
3	1
4	2
5	3
6	4
7	3
8	1
9	3
10	1

De todos los valores el más frecuente, el que más se repite es el 6, que se repite 4 veces

La moda es el 6

Ejemplo de variable bimodal

El número de pie o talla de zapato de los 40 alumnos de una clase es:

X_i Talla zapato	f_i Frecuencia
36	1
37	3
38	7
39	4
40	5
41	3
42	4
43	7
44	4
45	2
	N = 40

La moda es 7

Esta variable es bimodal, tiene dos modas: el 38 (número de pie más habitual en las mujeres) y el 43 (número de pie más habitual en los hombres).

Actividades

Halle la moda del número de hermanos que tienen los 40 jóvenes que participan en una excursión.

Nº hermanos	Frecuencia
1	13
2	20
3	6
4	0
5	1

Mediana

Es el valor que ocupa la posición central, ordenados los datos de menor a mayor.

- Si hay un número impar de datos, hay un único valor que ocupa la posición central: esa es la mediana.
- Si hay un número par de datos, hay dos valores centrales. La mediana es la media de dichos valores.

Sólo tiene sentido para variables cuantitativas.

Ejemplo con un número impar de datos

Al lanzar 25 veces un dado se han obtenido los siguientes resultados:
6,4,1,4,5, 5,5,5,1,1,2,1,3,4,5, 4,3,1,4,5, 2,4,4,6,3,

Resultado dados	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
1	5	5 (hasta aquí 5 tiradas)
2	2	5 + 2 = 7 (hasta aquí 7 t.)
3	3	7 + 3 = 10 (hasta aquí 10 t.)
4	7	10 + 7 = 17 (hasta aquí 17 t.)
5	6	17 + 6 = 23 (hasta aquí 23 t.)
6	2	23 + 2 = 25 (hasta aquí 25 t.)
	N = 25	

Para calcular la mediana procedemos:

1. Hallamos la posición central: Si hay 25 datos (impar) calculamos la mitad 12,5 y la posición central es el número natural siguiente, es decir la 13ª.
2. Miramos en la columna de las frecuencias acumuladas dónde está situada esta posición: la posición 13ª está situada después de la 10ª y antes de la 17ª.
3. El valor central será un 4. Esta es la mediana.

Ejemplo:

En una clase de 20 alumnos, las notas de C. Sociales han sido las siguientes:
7,6,4,8,5 2,7,6,5,9 1,7,3,4,9, 6,6,5,9,10

Notas x_i	F. absoluta f_i	F. acumulada	
1	1	1	1
2	1	2	1+1 = 2
3	1	3	2+1 = 3
4	2	5	3+2 = 5
5	3	8	5+3 = 8
6	4	12	8+4 = 12
7	3	15	12+3 = 15
8	1	16	15+1 = 16
9	3	19	16+3 = 19
10	1	20	19+1 = 20

1.Hallamos las posiciones centrales: Si hay 20 datos (par) calculamos la mitad 10 y las posiciones centrales son ésta y la siguiente: la 10ª y la 11ª

2. Miramos en la columna de las frecuencias acumuladas dónde están situadas esas posiciones

3.Los valores centrales son 6 y 6. Su media 6.

La mediana es 6.

Actividades

Halle la moda del número de hermanos que tienen los 40 jóvenes que participan en una excursión.

Nº hermanos	Frecuencia
1	13
2	20
3	6
4	0
5	1

Ejercicios

A. En el grupo 2ºB, del I.E.S. Juan Rodríguez, los alumnos han tenido el siguiente número de asignaturas suspensas:

1, 4, 1, 1, 5 1, 2, 0, 0, 3 0, 0, 1, 0, 2
5, 3, 0, 0, 2 0, 0, 1, 6, 1 3, 4, 0, 1, 2

Construya la tabla de frecuencias, incluyendo la frecuencia relativa, el porcentaje, la frecuencia acumulada y la desviación (esta última, si ha hecho las actividades complementarias), y responda a estas preguntas:

a) ¿De qué tipo de variable se trata?
b) ¿Cuántos alumnos tiene la clase?
c) ¿Cuáles son los valores que toma la variable?
d) ¿Qué valor tiene más frecuencia absoluta y cuál es dicha frecuencia? ¿Y el que menos?
e) ¿Cuál es la frecuencia relativa de 4 suspensos?
f) ¿Qué % han aprobado todo?
g) ¿Qué % de alumnos han tenido menos de 3 suspensos?
h) ¿Qué % de alumnos han tenido 4 o más suspensos?

Señale los siguientes parámetros:

a) Media
b) Moda
c) Mediana
d) Rango
e) Desviación media (esta última, si ha hecho las actividades complementarias)

Confeccione los siguientes gráficos:

a) Un diagrama de barras para las frecuencias absolutas
b) Un polígono de frecuencias para los porcentajes

B. La estatura de los jóvenes de 16 años que estudian el Ciclo Formativo de Carrocería en el I.E.S. Juan Rodríguez es:

Estatura	Jóvenes
1,40-1,45	1
1,45-1,50	2
1,50-1,55	2
1,55-1,60	6
1,60-1,65	5
1,65-1,70	10
1,70-1,75	20
1,75-1,80	7
1,80-1,85	2
1,85-1,90	2

Construya la tabla de frecuencias, incluyendo la marca de clase, la frecuencia relativa y el porcentaje, y responda a estas preguntas:

¿Cuál es la moda?
¿Cuál es la media?

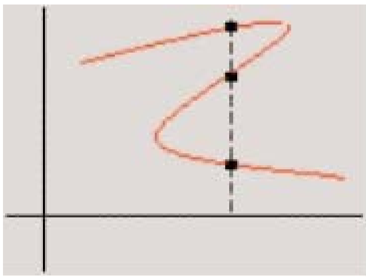
Realice los siguientes gráficos utilizando la marca de clase:

a) Un diagrama de sectores para el porcentaje

b) Un polígono de frecuencias para la frecuencia absoluta

FUNCIONES

En las funciones ponemos en relación dos o más magnitudes. Por ejemplo, la relación entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido en la velocidad constante que lleva un coche que circula por una autopista a 120 km/hora. Es decir, la velocidad podemos definirla como el espacio recorrido en unidad de tiempo. Esta relación también podemos representarla gráficamente.



Aprenderemos primero a representar puntos en plano para después abordar el concepto de función y su representación gráfica en el plano.

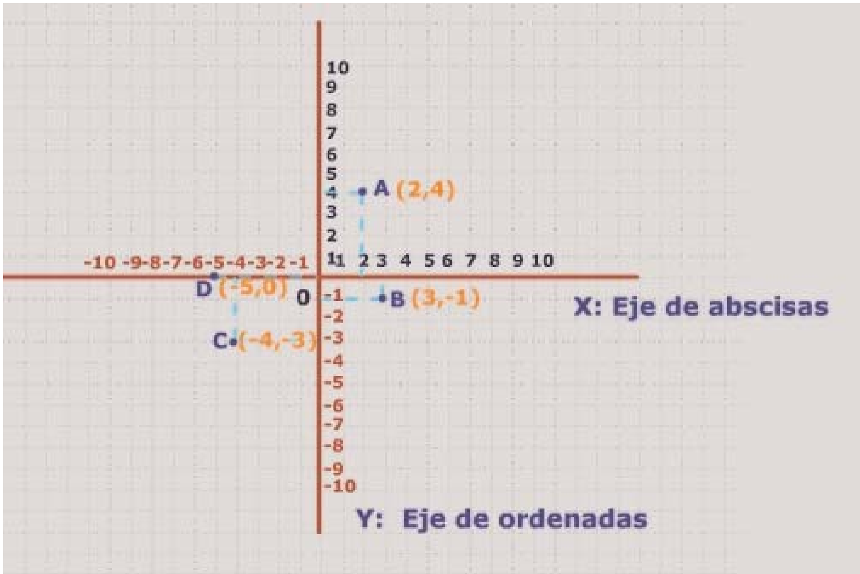
Representación de puntos en el plano

Se representan tomando como referencia unos ejes (ejes cartesianos). En estos ejes:

- El eje *horizontal* se llama eje X o eje de abscisas.
- El eje *vertical* se llama eje Y o eje de ordenadas.
- El punto 0, donde se cortan los dos ejes, es el origen de coordenadas.

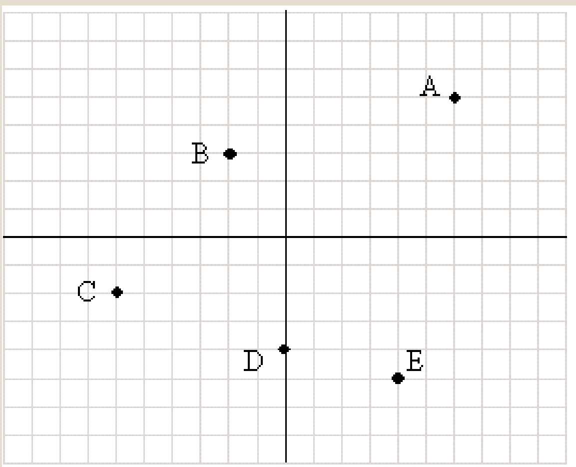
Cada punto del plano se designa por sus dos coordenadas:

- La primera coordenada se llama "x del punto" o abscisa.
- La segunda coordenada se llama "y del punto" u ordenada.



Actividades

1. Indique las coordenadas de los puntos representados en el plano:



2. La siguiente gráfica representa la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por dos amigos, Juan y Antonio. Observe la gráfica y responda a las preguntas siguientes:

a) ¿A qué distancia se encontraban antes de empezar el recorrido?

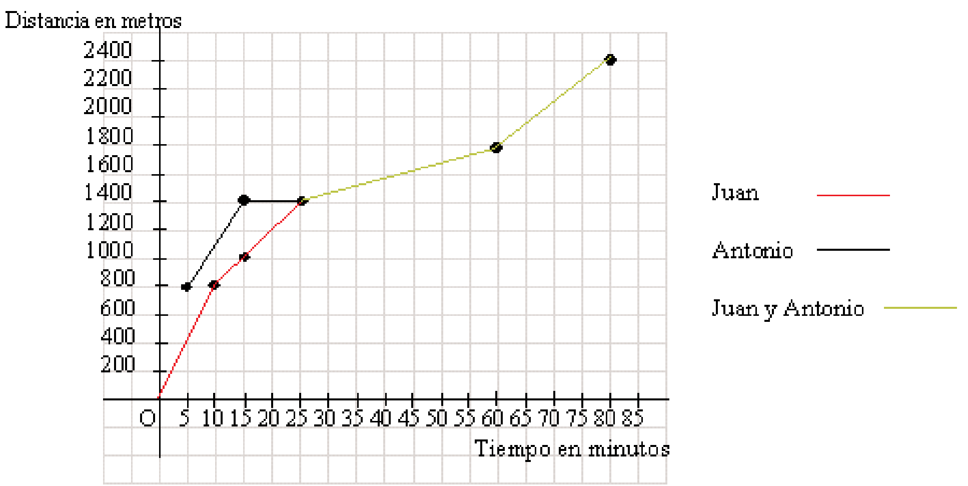
d) ¿Cuánto tiempo tarda Juan en encontrar a Antonio?

b) Si Juan ha salido a las 9:00 horas, ¿a qué hora ha salido Antonio?

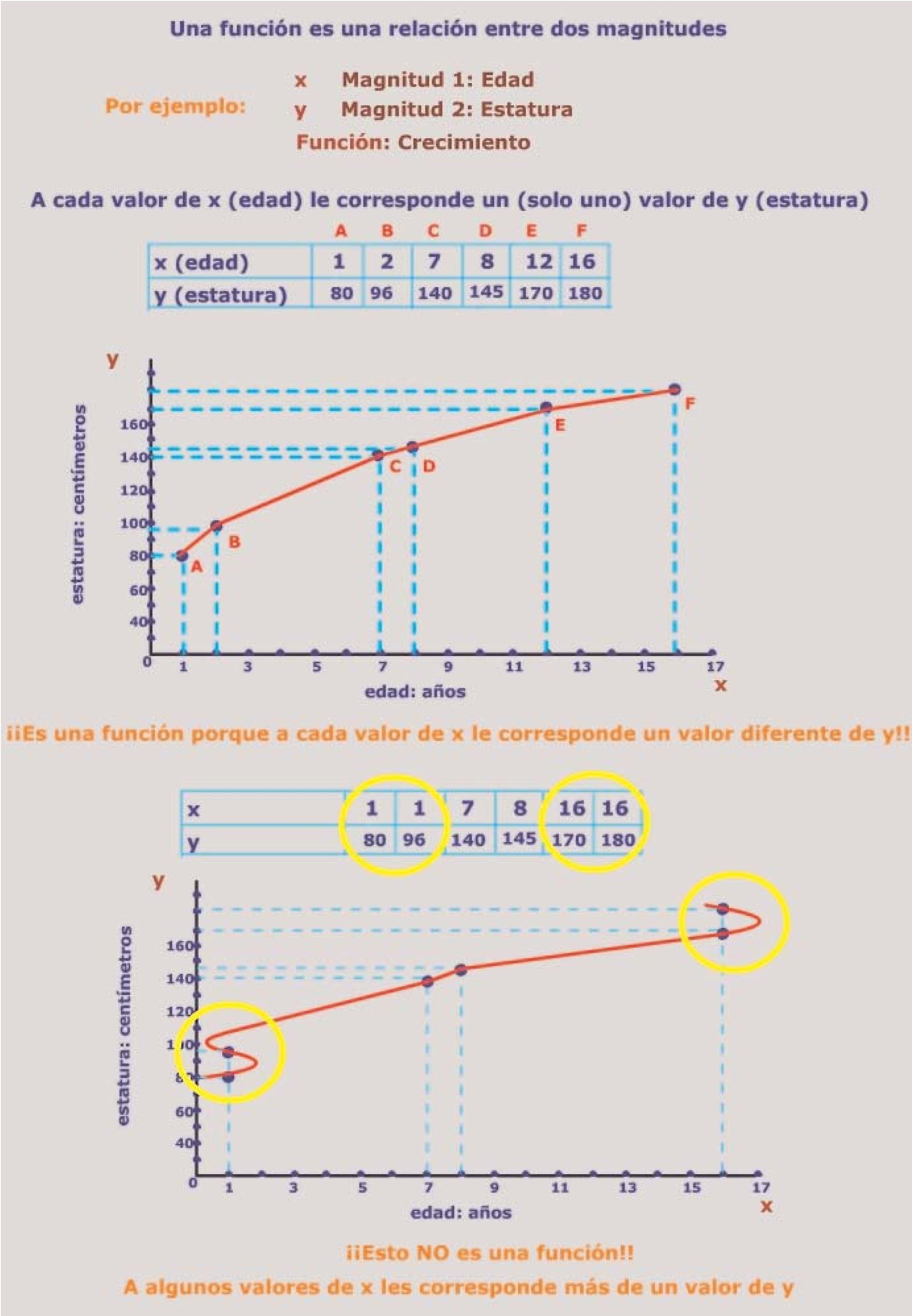
e) ¿Qué hacen los dos amigos a partir del momento en que se encuentran?

c) ¿Qué distancia ha recorrido Juan en el primer cuarto de hora?

f) ¿Qué distancia total ha recorrido Juan?¿Y Antonio?



¿Qué es una función?



Una función es una **relación entre dos magnitudes** de manera que al primer valor (variable independiente x) le corresponde un único valor (variable dependiente y).

Representación gráficas de funciones

Las funciones pueden expresarse en **tablas de valores.** En las que están escritos algunos de sus puntos o variables.

Cuando existe una *relación aritmética entre los valores de x y de y,* a dicha relación se le llama **ecuación de la función.**

Conociendo la ecuación de una función se pueden deducir u obtener, a partir de ella, tantos valores o puntos como se necesiten. Para ello, basta con ir dando valores a la x e ir obteniendo los correspondientes valores de y.

Magnitud x	2	3	4	5	6	7
Magnitud y	4	6	8	10	12	14

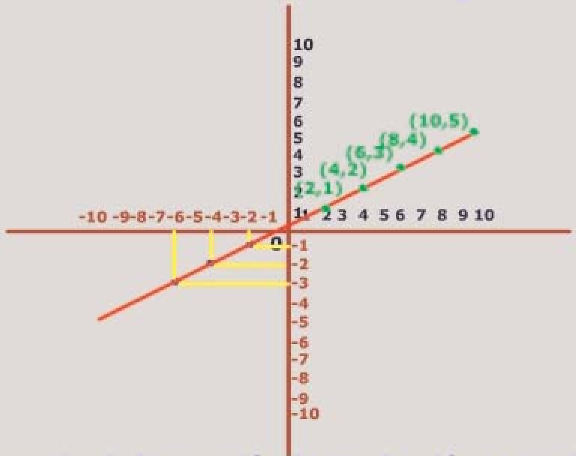
Los valores de y son el *doble* de los de x

$y = 2x$

Existe una relación → Es una ecuación de la función

Magnitud x	-2	-4	-6	8	20	-18
Magnitud y	-1	-2	-3	4	10	-9

Ecuación de la función: $y = \frac{1}{2}x$



Conociendo la ecuación de una función se pueden deducir u obtener, a partir de ella, tantos valores o puntos como se necesiten

Basta con ir dando valores a la x e ir obteniendo los correspondientes valores de y

También basta con seguir la trayectoria de la recta en la gráfica

Los puntos de coordenadas (x,y) se irán representando gráficamente en el plano.
Uniendo los puntos se irá obteniendo la gráfica de la función.

Actividades

Escriba la ecuación de cada función dada por su enunciado:

a) El valor de y se obtiene sumando dos unidades al triple del valor de x.

d) El valor de y es el valor del volumen de un cubo de lado x.

b) El valor de y es el resultado de elevar al cubo el valor de x y sumarle dos unidades.

e) El valor de y coincide con el área de un rectángulo de base x y de altura tres unidades más que la base.

c) El valor de y es el valor del perímetro de un triángulo equilátero de lado x.

f) El valor de y coincide con el volumen de un prisma de altura x + 2 cuya base es un cuadrado de lado x.

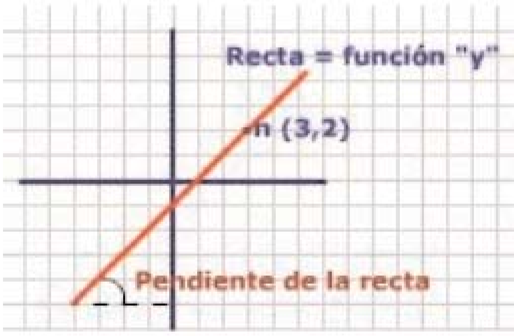
Funciones elementales

FUNCIONES CUYA REPRESENTACIÓN GRÁFICA ES UNA RECTA

Recordamos: cuando en una función *existe una relación aritmética entre los valores de x y de y,* a dicha relación se le llama **ecuación de la función.**

Conociendo la ecuación de una función se pueden deducir u obtener, a partir de ella, tantos valores o puntos como se necesiten. Sirve, pues, para prever valores de x o de y.

Ahora vamos a estudiar las funciona afines, lineales y constantes.



Funciones afines

Tienen una ecuación de la forma:

y = mx + n

Donde m y n son números distintos de 0.

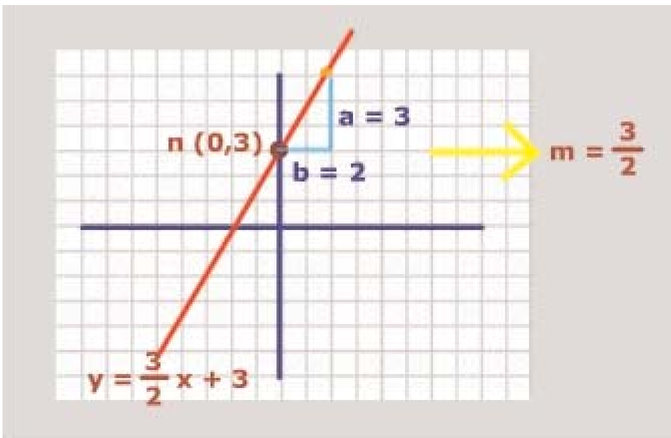
La m es la **pendiente de la recta.**

A n se le llama **ordenada en el origen** y representa los valores del *punto inicial.*

La función de ecuación:

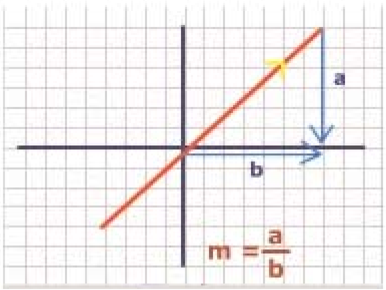
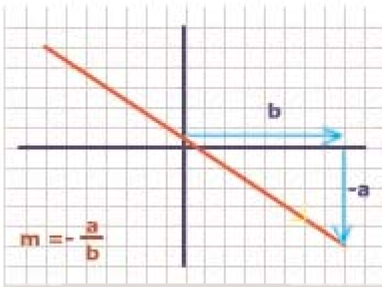
y = (3/2) x + 3

tiene la representación gráfica:



Esta función se representa mediante una recta de pendiente m que corta al eje y en el punto n.

La pendiente de una recta (m) es la medida de su crecimiento y da idea del grado de inclinación de la misma. Puede ser:

Positiva (m > 0)	Negativa (m < 0)
	

¿Cómo se traza una función (y) sabiendo la pendiente m?

Ejemplo:

Un automóvil, a las 12 horas, se encuentra en el kilómetro 50 de la carretera que une Teruel y Zaragoza, y va a una velocidad de 100 km/h

Funciones lineales

Una función lineal relaciona dos valores directamente proporcionales y tienen una ecuación de la forma:

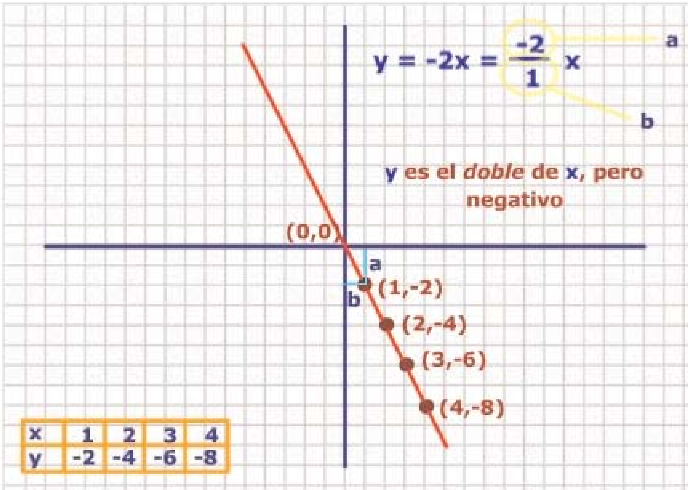
$$y = mx$$

Donde m es un número distinto de 0 y señala en número de veces que y contienea x.

La m es la **pendiente de la recta.**

Esta función se representa mediante una recta que pasa por el punto (0,0) que es el origen de las coordenadas.

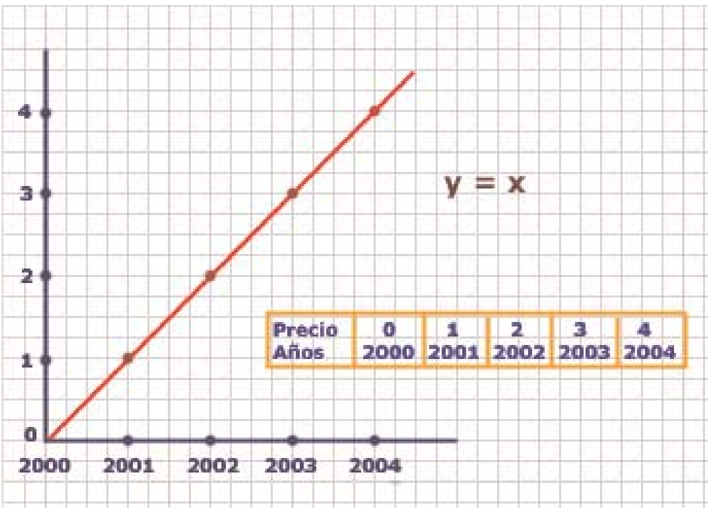
La función de ecuación **y = -2x** tiene por gráfica



Ejemplo:

El precio de aparcar un vehículo en la calleen el año 2000 era de 0 euros; en 2001, de 1 euro; en 2002, de 2 euros; en 2003, de 3 euros; y en 2004, de 4 euros.

$$y = x$$



Funciones constantes

Tienen una ecuación de la forma:

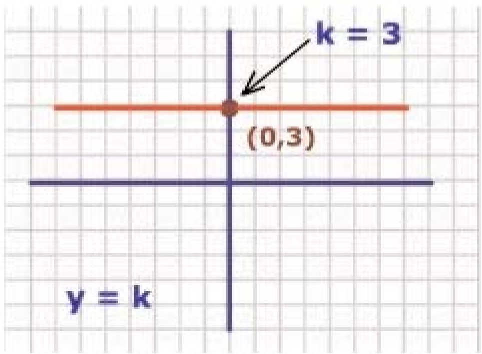
y = k

Donde k es un número.

Esta función se representa por *una recta paralela al eje X,* a una distancia k de este.

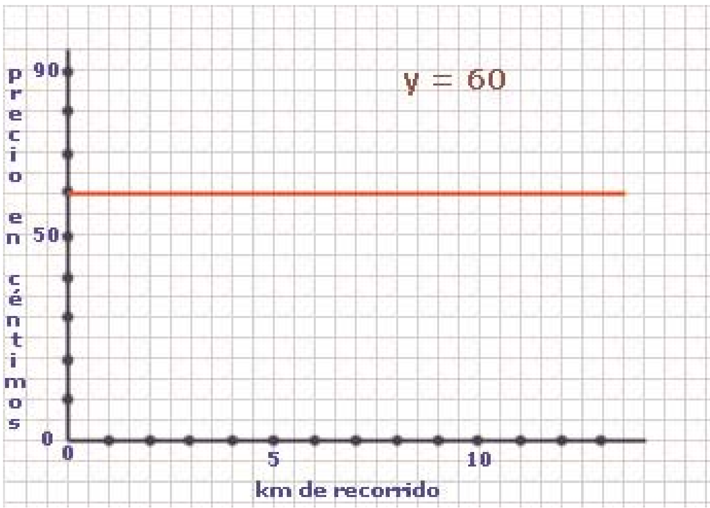
Hay que hacer notar que, en estas funciones, la y no depende de x

La función de ecuación **y = 3** tiene por gráfica



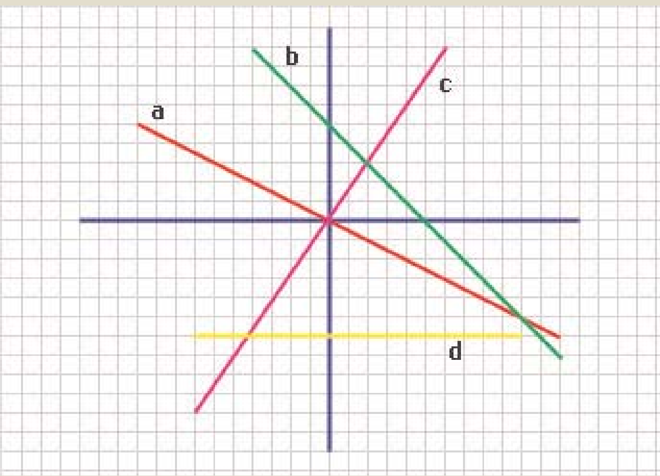
Ejemplo:

El billete del autobús urbano vale 0,60 euros independientemente de la distancia que recorramos.



Actividades

1. Escriba la ecuación de cada una de las siguientes funciones:



2. Utilizando la cudrícula, represente las siguientes ecuaciones:

a/ y= - 3/2 x +3

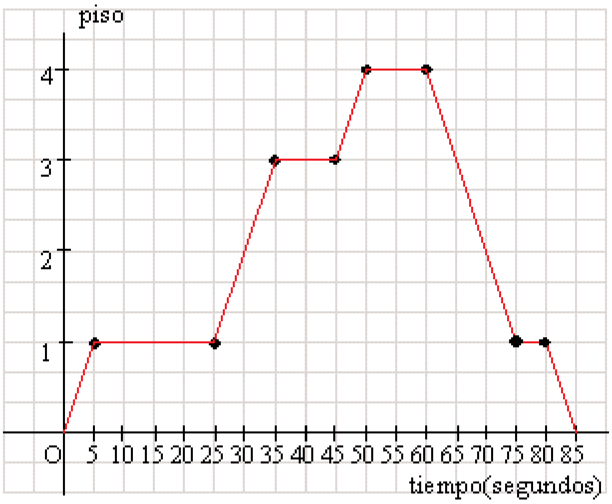
b/ y = 2x - 3

c/ y = -8

d/ y = -5x

Ejercicios

1. **La siguiente gráfica representa el piso en que se encuentra un ascensor con respecto al tiempo que tarda su recorrido:**



   a) ¿Cuánto tiempo ha tardado el ascensor en llegar al 1er piso?

   d) ¿Cuánto tiempo tarda en volver a la planta baja?

   b) ¿Cuánto tiempo ha tardado en alcanzar el último piso?

   e) ¿En qué planta ha estado más tiempo parado?

   c) ¿Cuánto tiempo ha estado parado?

   f) ¿Qué velocidad lleva el ascensor en metros por segundo si cada piso tiene una altura de 5 metros?

2. **Una agencia cobra por el alquiler de un coche 10 € diarios fijos más 0,20 € por cada kilómetro recorrido**

   a) Exprese la fórmula que indica el coste diario en función de la distancia recorrida.

   b) ¿Cuánto costará el alquiler si se han recorrido 230 km. en un día?

   c) Si se dispone de 60 € y se alquila el coche por un día, ¿qué distancia se podría recorrer?

INSTITUTO ARAGONÉS DE EMPLEO

UNIÓN EUROPEA

Fondo Social Europeo
"El FSE invierte en tu futuro"

GOBIERNO DE ARAGON